

EIGENSCHAFTEN DES
ZEITLICH MEHRDIMENSIONALEN
WIENERSCHEN PROZESSES

Siegfried Becker

1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554614_0045

EIGENSCHAFTEN DES ZEITLICH MEHRDIMENSIONALEN
WIENERSCHEN PROZESSES

D I S S E R T A T I O N
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Siegfried Becker
im August 1976



1. Berichterstatter: Professor Dr. H.G. Kellerer

2. Berichterstatter: Professor Dr. U. Oppel

Tag der mündlichen Prüfung: 28.3.1977

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Inhaltsübersicht	Seite II
§0. Bezeichnungen	1
§1. Grundlagen	4
1.1. Definition und elementare Eigenschaften	4
1.2. Erzeugung neuer Wiener'scher Prozesse	10
1.3. Die starke Markov-Eigenschaft	15
1.4. Eine Abschätzung	18
§2. Der Träger des $(N,1)$ -dimensionalen Wiener-Maßes	23
2.1. Der Hauptsatz	23
2.2. Eine Anwendung	33
§3. Das asymptotische Verhalten	36
3.1. Meßbarkeit	37
3.2. Das asymptotische Verhalten für $h \rightarrow \infty$	46
3.3. Das asymptotische Verhalten für $h \rightarrow 0$	51
§4. Differenzierbarkeit	66
§5. Weitere lokale Eigenschaften	78
5.1. Lokale Extrema	78
5.2. Nullstellen	84
Liste der verwendeten Symbole	95
Literaturverzeichnis	96

Einleitung und Inhaltsübersicht

Ein weitgehend befriedigendes mathematisches Modell für die im Jahre 1827 von dem Botaniker Brown entdeckte Bewegung, die sehr kleine, in einer Flüssigkeit suspendierte Teilchen ausführen, stellt ein stochastischer Prozeß $(W_1(t), W_2(t), W_3(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ dar, dessen reellwertige Koordinatenprozesse $(W_i(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, $i=1,2,3$, unabhängig sind und folgenden drei Bedingungen genügen:

- (1) Fast sicher alle Pfade $t \mapsto W_i(t)$ sind stetig und nehmen an der Stelle 0 den Wert 0 an.
- (2) Für $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ sind die Zuwächse $W_i(t_k) - W_i(t_{k-1})$, $1 \leq k \leq n$, unabhängig.
- (3) $W_i(t) - W_i(s)$ ist für $0 \leq s \leq t$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t-s$.

Auf dem Hintergrund der von Einstein und Smoluchowski geschaffenen Theorie über die Brownsche Bewegung konstruierte erstmals Wiener im Jahre 1923 solche Prozesse. Es ist daher üblich, $(W_i(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ bzw. $(W_1(t), W_2(t), W_3(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ als räumlich eindimensionalen bzw. räumlich dreidimensionalen Wienerischen Prozeß zu bezeichnen.

Während die Verallgemeinerung zum räumlich d -dimensionalen Wienerischen Prozeß auf der Hand liegt (man setze statt 3 eben d unabhängige räumlich eindimensionale Wienerische Prozesse $(W_i(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, $1 \leq i \leq d$, zu $(W_1(t), \dots, W_d(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ zusammen, sind

beim Versuch die zeitliche Dimension, d.h. die Dimension der Parametermenge, von 1 auf N zu erhöhen, verschiedene Wege eingeschlagen worden (vgl. Bemerkung 3 zu Theorem 1.1, Seite 8).

Gegenstand dieser Arbeit ist der auf Censov ([3]) zurückgehende Wienersehe Prozeß mit mehrdimensionaler Parametermenge.

Mittels der Theorie der schwachen Konvergenz von Maßen auf dem Raum C_N aller auf $\mathbb{R}_+^N$ definierten reellwertigen stetigen Funktionen, die auf $d\mathbb{R}_+^N := \{t \in \mathbb{R}_+^N : \prod_{i=1}^N t_i = 0\}$ verschwinden, läßt sich der von Censov konstruierte Prozeß $(w^N(t))_{t \in \mathbb{R}_+^N}$ folgendermaßen erhalten:

Ausgehend von einer auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definierten Familie $f_{(k_1, \dots, k_N)}$, $(k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^N$, unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1, wird durch die folgenden beiden Formeln für jedes $\omega \in \Omega$ und jede natürliche Zahl n eine Abbildung $w_n(\omega)$ von $\mathbb{R}_+^N$ in $\mathbb{R}$ definiert:

$$S(l_1, \dots, l_N)(\omega) := \sum_{1 \leq k_1 \leq l_1} \dots \sum_{1 \leq k_N \leq l_N} f_{(k_1, \dots, k_N)}(\omega),$$

$$(w_n(\omega))(t) := n^{-N/2} \sum_{J \subset \{1, \dots, N\}} \prod_{i \in J} (nt_i - l_i) \prod_{i \notin J} (1 - (nt_i - l_i)) \cdot S(l_1 + \varepsilon_1^J, \dots, l_N + \varepsilon_N^J)(\omega)$$

für $l_i \geq 0$ und $t := (t_1, \dots, t_N) \in \prod_{i=1}^N [\frac{l_i}{n}, \frac{l_i+1}{n}]$. ε_i^J ist dabei

1 bzw. 0, falls i zu J bzw. i nicht zu J gehört.

Es stellt sich heraus, daß $W_n, n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen mit dem Wertebereich C_N , d.h. meßbare Abbildungen von $(\Omega, \mathcal{A})$ in $(C_N, \mathcal{L}(C_N))$ sind. Dabei ist $\mathcal{L}(C_N)$ die von der Topologie der kompakten Konvergenz auf C_N erzeugte Borel- σ -Algebra. Die Folge $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist verteilungskonvergent gegen eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definierte Zufallsvariable W^N mit Werten in C_N , die folgende zwei Forderungen erfüllt:

- (4) Für paarweise disjunkte Intervalle $I_k := \prod_{i=1}^N [s_i^k, t_i^k] \subset \mathbb{R}_+^N$, $1 \leq k \leq n$, sind $\Delta W^N(I_1), \dots, \Delta W^N(I_k)$ unabhängig.
- (5) $\Delta W^N(\prod_{i=1}^N [s_i, t_i])$ ist für $0 \leq s_i \leq t_i$, $1 \leq i \leq N$, normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\prod_{i=1}^N (t_i - s_i)$.

Dabei ist unter $\Delta f(I)$ der Zuwachs der Funktion $f \in C_N$ auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}_+^N$ zu verstehen.

Da sich die Bedingungen (4) und (5) für $N=1$ auf (2) und (3) reduzieren, liegt es nahe, W^N als zeitlich N -dimensionalen und räumlich eindimensionalen oder kurz $(N,1)$ -dimensionalen Wiener-schen Prozeß zu bezeichnen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diesen $(N,1)$ -dimensionalen Wiener-schen Prozeß W^N und seine auf $(C_N, \mathcal{L}(C_N))$ definierte Verteilung μ^N , die den Namen $(N,1)$ -dimensionales Wiener-Maß erhält, auf bestimmte Eigenschaften hin zu untersuchen. Um welche Eigenschaften es sich dabei handelt, und welche Ergebnisse zu

verzeichnen sind, soll im folgenden anhand einer Inhaltsübersicht erläutert werden.

Nach Einführung einer Reihe von Bezeichnungen in §0 werden in §1 grundlegende Eigenschaften von W^N zusammengestellt.

Anschließend an den Abschnitt 1.1, der einen Abriß über die verschiedenen in der Literatur für W^N geführten Existenzbeweise enthält, wird das Verhalten von W^N unter gewissen stetigen Transformationen des Raumes C_N untersucht und gezeigt, daß sich $(k,1)$ -dimensionale Wiener'sche Prozesse für $1 \leq k \leq N$ als Teilprozesse von W^N gewinnen lassen. Abschnitt 1.3 erweitert die als schwache Markov-Eigenschaft von W^N anzusehende dritte Behauptung in Satz 1.2 (Seite 11) zu einer der starken Markov-Eigenschaft entsprechenden Aussage (Satz 1.6, Seite 16). Im letzten Abschnitt des §1 wird eine in §3 und §4 viel benutzte Abschätzung für

$$P(\max\{|W^N(t_1, \dots, t_N) - W^N(s_1, \dots, s_N)| : s_i \leq t_i \leq u_i \text{ für } 1 \leq i \leq N\} \geq x)$$
 hergeleitet.

Im Gegensatz zum zeitlich eindimensionalen Fall hat die starke Markov-Eigenschaft im zeitlich mehrdimensionalen Fall nur geringe Bedeutung. Während sie nämlich im zeitlich eindimensionalen Fall ihren Nutzen hauptsächlich der Anwendung auf Stoppzeiten, die Eintrittszeiten zu gewissen Borelschen Teilmengen darstellen, verdankt, lassen sich entsprechende Eintritts-

zeiten wegen des nicht totalgeordneten Zeitbereichs im mehrdimensionalen Fall gar nicht definieren.

Schwierigkeiten entstehen dadurch insbesondere in §2, und zwar beim Beweis des in Abschnitt 2.1 enthaltenen Hauptsatzes, der besagt, daß der Träger des $(N,1)$ -dimensionalen Wiener-Maßes der gesamte Raum C_N ist (Theorem 2.1, Seite 32). Denn die Beweismethoden aus [6], wo die Aussage für $N=1$ unter zweimaliger Anwendung der starken Markov-Eigenschaft im Zusammenhang mit Eintrittszeiten gezeigt wird, können im allgemeinen Fall nicht übernommen werden.

Benutzt wird Theorem 2.1, um im Abschnitt 2.2 zu zeigen, daß die von Orey und Pruitt in [11] für $2N > d$ gestellte Frage, ob $\{W^{N,d}(t): t \in \mathbb{R}_+^N\}$ $\mathbb{P}$ -fast sicher den gesamten Raum $\mathbb{R}^d$ ausfüllt, wenigstens im Fall $N \geq d$ zu bejahen ist (Theorem 2.2, Seite 34). Bei $W^{N,d}$ handelt es sich dabei um einen (N,d) -dimensionalen Wiener-Prozeß, der entsteht, wenn man d unabhängige $(N,1)$ -dimensionale Wiener-Prozesse $W_1^N, \dots, W_d^N$ zu $W^{N,d} = (W_1^N, \dots, W_d^N)$ zusammensetzt.

Wie eine einfache Überlegung beweist, besitzen für $t, \alpha \in \mathbb{R}_+^N$ die stochastischen Prozesse $(W^N(t + \alpha h))_{h \in \mathbb{R}_+}$ und $(W^1(\prod_{i=1}^N (t_i + \alpha_i h)))_{h \in \mathbb{R}_+}$ aufgefaßt als Zufallsvariablen mit Werten in C_1 dieselbe Verteilung. Liegt (t, α) sogar in $R_\infty := \{(s, \beta): s \in \mathbb{R}_+^N \text{ und } \beta \in \mathbb{R}_+^N - \{0\} \text{ mit } s + \beta > 0\}$, so gilt

$\lim_{h \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N (t_i + \alpha_i h) = \infty$, so daß aus dem Gesetz vom iterierten Logarithmus für W^1 die Gleichungen

$$(6) \quad \mathbb{P} \left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(t + \alpha h)}{(2 \prod_{1 \leq i \leq N} (t_i + \alpha_i h) \log(\log h))^{1/2}} = 1 \right) = 1$$

und

$$(7) \quad \mathbb{P} \left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(t + \alpha h)}{(2 \prod_{1 \leq i \leq N} (t_i + \alpha_i h) \log(\log h))^{1/2}} = -1 \right) = 1$$

folgen.

In §3, der dem Studium des asymptotischen Verhaltens von W^N längs Geraden gewidmet ist, wird im Abschnitt 3.2 gezeigt, daß sich (6) (und entsprechend (7)) erweitern läßt zu

$$(8) \quad \mathbb{P} \left(\bigcap_{(t, \alpha) \in R_\infty} \left\{ \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(t + \alpha h)}{(2 \prod_{1 \leq i \leq N} (t_i + \alpha_i h) \log(\log h))^{1/2}} = 1 \right\} \right) = 1,$$

daß also für $\mathbb{P}$ -fast alle ω die Funktion $W^N(\omega)$ auf jedem in $\mathbb{R}_+^N - d\mathbb{R}_+^N$ gelegenen Strahl einem Gesetz vom iterierten Logarithmus gehorcht (Theorem 3.1, Seite 49).

Abschnitt 3.3 befaßt sich mit der analogen Fragestellung bei Annäherung an endliche Punkte t längs Geraden $(t + \alpha h)_{h \in \mathbb{R}_+}$.

Dabei sind wegen $W^N(s) = 0$ für $s \in d\mathbb{R}_+^N$ nur die in

$R_0 := \{(s, \beta) : s \in \mathbb{R}_+^N \text{ und } \beta \in \mathbb{R}^N - \{0\} \text{ mit } s_i \vee \beta_i > 0 \text{ für } 1 \leq i \leq N\}$ gelegenen Paare (t, α) von Interesse. Theorem 3.2 (Seite 61) beweist für $t \in \mathbb{R}_+^N$ die der Gleichung (8) entsprechende Gleichung

$$(9) \quad \mathbb{P} \left(\bigcap_{\alpha : (t, \alpha) \in R_0} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{W^N(t + \alpha h) - W^N(t)}{(2 (\prod_{1 \leq i \leq N} (t_i + \alpha_i h) - \prod_{1 \leq i \leq N} t_i) \log(\log 1/h))^{1/2}} = 1 \right\} \right) = 1.$$

Der Erörterung von Meßbarkeitsproblemen, wie sie zum Beispiel durch die überabzählbare Durchschnittsbildung in (8) und (9) auftreten, ist der Abschnitt 3.1 gewidmet.

In §4 wird nicht nur untersucht, ob W^N partiell differenzierbar ist, sondern unter Zugrundelegung der Definition 4.1 (Seite 66) allgemein für $(t, \alpha) \in R_0$ nach der Differenzierbarkeit von W^N im Punkt t in Richtung α gefragt.

Da, wie bereits Wiener zeigte, fast sicher alle Pfade des $(1,1)$ -dimensionalen Wienerischen Prozesses W^1 für kein Paar $(t, \alpha) \in R_0$ in t in Richtung α differenzierbar sind, liegt die Vermutung nahe, daß die entsprechende Aussage auch für W^N richtig ist. Diese Vermutung ist jedoch für $N \geq 3$ falsch; denn Theorem 4.2 (Seite 76) besagt: Für $\mathbb{P}$ -fast alle ω ist die Funktion $W^N(\omega)$

- (a) in t in Richtung α differenzierbar und besitzt die Ableitung 0 für solche $(t, \alpha) \in R_0$, für die mindestens drei Koordinaten von t verschwinden.
- (b) in t nicht in Richtung α differenzierbar für solche $(t, \alpha) \in R_0$, für die höchstens zwei Koordinaten von t verschwinden.

Während zum Beweis von (a) Theorem 3.2 herangezogen wird, ist (b) eine Folgerung aus dem Hauptsatz des §4 (Theorem 4.1, Seite 68), der eine Verallgemeinerung einer von Dvoretzky ([5])

für W^1 bewiesenen Aussage darstellt und die Existenz einer positiven Konstanten C mit

$$P\left(\bigcup_{(t,\alpha)\in R_0} \left\{ \lim_{h\downarrow 0} \frac{|W^N(t+\alpha h) - W^N(t)|}{\left(\prod_{1\leq i\leq N} (t_i + \alpha_i h) - \prod_{1\leq i\leq N} t_i\right)^{1/2}} \geq C \right\} \right) = 1 \text{ garantiert.}$$

Die Übertragung bekannter Ergebnisse über lokale Extrema und Nullstellen der Pfade des zeitlich eindimensionalen Wienerischen Prozesses auf den zeitlich mehrdimensionalen Fall ist Gegenstand des §5.

Der Beweis der in Satz 5.2 (Seite 80) formulierten Aussage "P-fast sicher alle Pfade $W^N(\omega)$ besitzen eine in R_+^N dichtliegende Teilmenge von Minimum- bzw. Maximumstellen" wird durch vollständige Induktion nach N geführt. Beim Nachweis des Induktionsschritts von N auf $N+1$ wird dabei benutzt, daß $W^{N+1}(\omega)$ P-fast sicher nur strenge lokale Extrema besitzt (Satz 5.1, Seite 78).

Der Anregung von Pyke in [18] folgend, nämlich topologische Eigenschaften der Nullstellenmengen $\{t: W^N(\omega; t)=0\}, \omega \in \Omega$, zu untersuchen, wird im abschließenden Abschnitt 5.2 für jeden Punkt $y \in R$ nachgewiesen, daß $\{t: W^N(\omega; t)=y\}$ P-fast sicher perfekt (Satz 5.3, Seite 85) und nicht zusammenhängend (Satz 5.6, Seite 88) ist. Während im Fall $N=1$ die erste Aussage die starke Markov-Eigenschaft als Beweismittel benötigt, gelingt für $N \geq 2$ ein elementarer Beweis. Beim Nachweis der zweiten

Aussage wird auf §2 zurückgegriffen.

Herrn Professor Dr. H.G. Kellerer danke ich für die Betreuung
dieser Arbeit.

§0. Bezeichnungen

Um die Ausführungen in den folgenden Paragraphen nicht unnötig oft durch Definitionen unterbrechen zu müssen, werden diejenigen Bezeichnungen, deren Einführung nicht unbedingt an der Stelle ihres ersten Auftretens notwendig erscheint, in diesem Paragraphen zusammengestellt.

Mit t_i wird die i -te Koordinate eines Punktes $t \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet. $e(i)$ ist der i -te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^N$. Für $(c, \dots, c) \in \mathbb{R}^N$ wird mit Ausnahme des Nullvektors, der die Bezeichnung 0 erhält, kurz $\langle c \rangle$ geschrieben.

$|t-s|$ ist der euklidische Abstand zweier Punkte $s, t \in \mathbb{R}^N$.

Setzt man $s \leq t$ genau dann, wenn $s_i \leq t_i$ für $1 \leq i \leq N$, so wird dadurch eine teilweise Ordnung auf dem $\mathbb{R}^N$ definiert. Anders als sonst üblich bedeutet $s < t$ nicht $s \leq t$ und $s \neq t$, sondern $s_i < t_i$ für alle i . $s \wedge t$ bzw. $s \vee t$ stellt das Infimum bzw. Supremum von s und t bezüglich " $\leq$ " dar.

Mit Hilfe der teilweisen Ordnung " $\leq$ " lassen sich Intervalle im $\mathbb{R}^N$ definieren: $[s, u] := \{t \in \mathbb{R}^N : s \leq t \leq u\}$ und entsprechend $]s, u]$, $[s, u[$ und $]s, u[$. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Eckpunkte s und u der Relation $s \leq u$ genügen.

Sind für $1 \leq i \leq N$ reelle Zahlen t_{ik_i} , $0 \leq k_i \leq l_i$, mit $t_{i0} \leq t_{i1} \leq \dots \leq t_{il_i}$ gegeben, so wird die Familie $t^k := (t_{1k_1}, \dots, t_{Nk_N})$, $0 \leq k \leq 1$, als Gitter bezeichnet.

$\mathbb{R}_+^N$ ist die Menge aller $t \in \mathbb{R}^N$ mit $t \geq 0$ und $d\mathbb{R}_+^N$ der topologische

Rand $\{t \in \mathbb{R}_+^N : \prod_{i=1}^N t_i = 0\}$ von $\mathbb{R}_+^N$. Die Gesamtheit aller in $\mathbb{R}_+^N$ enthaltenen Intervalle erhält den Namen $\mathfrak{I}^N$.

Alle stetigen Abbildungen von $A \subset \mathbb{R}_+^N$ in $\mathbb{R}^d$, die auf $\text{Rand } A$ verschwinden, sind in $C_0(A, \mathbb{R}^d)$ zusammengefaßt, wofür im Fall $d=1$ auch $C_0(A)$ geschrieben wird. Ist $A = \mathbb{R}_+^N$, so werden für $C_0(A, \mathbb{R}^d)$ bzw. $C_0(A)$ die Symbole C_N^d bzw. C_N verwendet. Die Topologie der kompakten Konvergenz macht $C_0(A, \mathbb{R}^d)$ zu einem topologischen Raum.

Jede Abbildung f einer Menge M in eine Produktmenge $M_1 \times \dots \times M_d$ wird identifiziert mit dem Tupel $(\pi_1 \circ f, \dots, \pi_d \circ f)$, wobei π_i die Projektion von $M_1 \times \dots \times M_d$ auf M_i ist. In diesem Sinne sind zum Beispiel $C_0(A, \mathbb{R}^d)$ und $(C_0(A))^d$ (auch aus topologischer Sicht) identisch.

Für jede Funktion $f \in C_N$ und jedes Intervall $I \in \mathfrak{I}^N$ mit den Eckpunkten s und t ist

$$\Delta f(I) := \Delta f(s, t) := \sum_{T \subset \{1, \dots, N\}} (-1)^{|\bar{T}|} f(s + \sum_{i \in T} (t_i - s_i) e(i)).$$

Dabei wird von folgenden zwei mengentheoretischen Bezeichnungen Gebrauch gemacht:

$\bar{A}$ bzw. $|A|$ steht für das Komplement bzw. die Mächtigkeit der Teilmenge A einer Menge M .

Die Mengenfunktion $\Delta f(\cdot)$ ist auf $\mathfrak{I}^N$ additiv. Ihr Wert an einer Stelle $I \in \mathfrak{I}^N$ kann als Zuwachs von f auf I interpretiert werden.

Ist A ein topologischer Raum, so bezeichnet $\mathcal{C}(A)$ bzw. $\mathfrak{F}(A)$ die

Gesamtheit der offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen von M .

In $\mathcal{O}(M)$ bzw. $\mathcal{F}(M)$ sind alle abzählbaren Durchschnitte bzw. Vereinigungen offener bzw. abgeschlossener Teilmengen von M zusammengefaßt. A^o bzw. A^a ist der offene Kern bzw. die abgeschlossene Hülle einer Teilmenge A von M . $\mathcal{L}(M)$ ist die durch $\mathcal{O}(M)$ über M erzeugte σ -Algebra.

Eine Abbildung X eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ in M heißt Zufallsvariable mit Werten in M , wenn sie $\mathcal{A}$ - $\mathcal{L}(M)$ -meßbar ist. Das auf $(M, \mathcal{L}(M))$ definierte Bildmaß von P unter X wird Verteilung von X genannt.

Ist $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, so bezeichnet $\tilde{\mathcal{A}}$ die σ -Algebra der $\mathcal{A}$ -universell-meßbaren Mengen und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf $\tilde{\mathcal{A}}$. Das Symbol $\sigma(\{f_i : i \in I\})$ steht für die kleinste σ -Algebra bezüglich der vorgegebene Abbildungen $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I$, meßbar sind.

Der zu den σ -finiten Maßräumen $(M_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $1 \leq i \leq d$, gehörige Produktraum erhält die Bezeichnung $(\prod_{i=1}^d M_i, \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i, \bigotimes_{i=1}^d \mu_i)$.

Schließlich ist A_{x_1} bzw. A_{x_2} für $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ die Schnittmenge $\{y_2 \in M_2 : (x_1, y_2) \in A\}$ bzw. $\{y_1 \in M_1 : (y_1, x_2) \in A\}$ einer Teilmenge A von $M_1 \times M_2$.

§1. Grundlagen

1.1. Definition und elementare Eigenschaften

Der in dieser Arbeit zu untersuchende Gegenstand wird eingeführt in

Definition 1.

(a) Eine Zufallsvariable $W = (W_1, \dots, W_d)$ mit Werten in $\mathbb{C}_N^d$ heißt "(N,d)-dimensionaler Wienerischer Prozeß", wenn sie folgenden drei Bedingungen genügt:

(1.1) $W_1, \dots, W_d$ sind unabhängig.

(1.2) $\Delta W_i(I_1), \dots, \Delta W_i(I_n)$ sind für paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{I}^N$ unabhängig ($1 \leq i \leq d$).

(1.3) $\Delta W_i(I)$ ist für $I \in \mathcal{I}^N$ und $1 \leq i \leq d$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\lambda^N(I)^{(*)}$.

(b) Ein Maß auf $(\mathbb{C}_N^d, \mathcal{L}(\mathbb{C}_N^d))$ heißt "(N,d)-dimensionales Wiener-Maß", wenn es die Verteilung eines (N,d)-dimensionalen Wienerischen Prozesses ist.

Bemerkungen:

1. Aus Eigenschaft (1.3) folgt wegen $W_i(t) = \Delta W_i([0, t])$, daß $W_i(t)$ für $t \in \mathbb{R}_+^N$ und $1 \leq i \leq d$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $\prod_{i=1}^d t_i$.

2. Da der Raum $\mathbb{C}_N$ eine abzählbare Basis besitzt, stimmen die σ -Algebren $\bigotimes_{i=1}^d \mathcal{L}(\mathbb{C}_N)$ und $\mathcal{L}(\mathbb{C}_N^d) = \mathcal{L}((\mathbb{C}_N)^d)$ überein. Die

^{*} λ^N ist das N-dimensionale Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$.

Meßbarkeit einer Abbildung $(w_1, \dots, w_d): (\Omega, \mathcal{O}) \longrightarrow (C_N^d, \mathfrak{L}(C_N^d))$

ist also gleichwertig zu der Meßbarkeit der Abbildungen

$w_i: (\Omega, \mathcal{O}) \longrightarrow (C_N, \mathfrak{L}(C_N))$ für $1 \leq i \leq d$. Aus Definition 1 folgt

daher unmittelbar, daß $(w_1, \dots, w_d)$ genau dann ein (N, d) -dimensionaler Wienerischer Prozeß ist, wenn $w_1, \dots, w_d$ unabhängige $(N, 1)$ -dimensionale Wienerische Prozesse sind.

Aufgrund dieses einfachen Zusammenhangs wird im folgenden beim Studium (N, d) -dimensionaler Wienerischer Prozesse die "räumliche" Dimension d in den meisten Fällen als 1 angenommen.

Den ersten Existenzbeweis für den "zeitlich" mehrdimensionalen Wienerischen Prozeß führt Censov im Jahre 1956 ([3]). Er zeigt, daß die Zuwächse eines reellwertigen stochastischen Prozesses $(w(t))_{t \in [0,1]^2}$ mit den Eigenschaften (1.2) und (1.3) (einen solchen Prozeß gibt es wegen der Verträglichkeit der endlich-dimensionalen Verteilungen) einer Momentenbedingung genügen, deren Erfüllung die Stetigkeit fast aller Pfade zur Folge hat.

Jeh ([7]) beweist die Existenz eines dem $(2, 1)$ -dimensionalen Wiener-Maß entsprechenden Maßes auf $C_0([0,1]^2)$, indem er zunächst eine geeignete Mengenfunktion auf einer $\mathfrak{L}(C_0([0,1]^2))$ erzeugenden Algebra angibt. Umfangreiche Rechnungen sichern die σ -Additivität dieser Mengenfunktion, worauf der Fortsetzungssatz zum Ziel führt.

Delporte ([4]) und W. Park ([15]) stellen einen stochastischen Prozeß $(W(t))_{t \in [0,1]^N}$ mit den Eigenschaften (1.2) und (1.3) dar als Reihe über unkorrelierte ([4]) bzw. unabhängige ([15]) normalverteilte Zufallsvariablen versehen mit von t stetig abhängenden Koeffizienten, die trigonometrische Polynome sind ([4]) bzw. aus den Haarschen Orthogonalfunktionen gewonnen werden ([15]). Da diese Reihe fast sicher gleichmäßig in t konvergiert, sind fast alle Pfade stetig.

Ein relativ einfacher Existenzbeweis für das Wiener-Maß auf $C_0([0,1]^2)$ gelingt Kuelbs ([9]) und W. Park ([16]) mittels der Theorie der schwachen Konvergenz von Maßen. Mit Hilfe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen wird eine Folge einfach gebauter Zufallsvariablen mit Werten in $C_0([0,1]^2)$ konstruiert, deren Verteilungen schwach gegen das Wiener-Maß konvergieren.

Die Diplomarbeit des Verfassers ([2]) enthält eine Verallgemeinerung dieses Existenzbeweises auf den Fall des zu Beginn dieses Abschnitts definierten $(N,1)$ -dimensionalen Wiener-Maßes auf C_N .

Keine Erwähnung in der Literatur findet die im Vergleich zur Existenzfrage triviale Tatsache der Eindeutigkeit des $(N,1)$ -dimensionalen Wiener-Maßes. Der Vollständigkeit halber soll die Eindeutigkeit hier bewiesen werden:

Es sei W ein $(N,1)$ -dimensionaler Wienerischer Prozeß. Zu jedem Gitter $(t^k)_{0 \leq k \leq 1}$ in $\mathbb{R}_+^N$ mit $t^0 = 0$ existiert eine lineare Abbildung L des $\prod_{i=1}^N l_i$ -dimensionalen euklidischen Raumes in sich mit $(W(t^k))_{\langle 1 \rangle \leq k \leq 1} = L((\Delta W(t^k - \langle 1 \rangle), t^k)_{\langle 1 \rangle \leq k \leq 1})$. Die Eigenschaften (1.2) und (1.3) bestimmen daher eindeutig die Verteilung von $(W(t^k))_{\langle 1 \rangle \leq k \leq 1}$ und damit die Verteilung von W ; denn die Mengen der Form

$\{f \in C_N: f(t^i) \in B_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$, $t^i \in \mathbb{R}_+^N$, $B_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ und $n \in \mathbb{N}$ bilden einen durchschnittsstabilen Erzeuger von $\mathcal{L}(C_N)$.

Existenz- und Eindeutigkeitsaussage werden festgehalten in Theorem 1.

Es gibt genau ein (N,d) -dimensionales Wiener-Maß. |

Bemerkungen:

1. Aus Theorem 1 kann nicht geschlossen werden, daß nur ein (N,d) -dimensionaler Wienerischer Prozeß existiert. So berühren zum Beispiel Abänderungen der Zufallsvariablen W aus Definition 1 auf Nullmengen nicht die Eigenschaften (1.1), (1.2) und (1.3). Es ist jedoch einer der (N,d) -dimensionalen Wienerischen Prozesse ausgezeichnet, nämlich die identische Abbildung von $(\Omega, \mathcal{O}, \mathbb{P})$ in C_N^d , wobei $\Omega = C_N^d$, $\mathcal{O} := \mathcal{L}(C_N^d)$ und $\mathbb{P}$ das (N,d) -dimensionale Wiener-Maß ist.

2. Wie aus dem Eindeutigkeitsbeweis zu Theorem 1 hervorgeht,

handelt es sich bei den endlichdimensionalen Verteilungen eines (N,d) -dimensionalen Wienerischen Prozesses W um zentrierte Normalverteilungen. W ist also ein zentrierter Gaußscher Prozeß, genauer ein zentrierter Gaußscher Prozeß mit der Kovarianzfunktion $E(W(s) \cdot W(t)) = \prod_{i=1}^N s_i \wedge t_i$ (vgl. Satz 1).

3. Der hier betrachtete $(N,1)$ -dimensionale Wienerische Prozeß darf nicht verwechselt werden mit dem von Lévy ([11]) unter dem Namen "mouvement brownien à N paramètres" konstruierten zentrierten Gaußschen Prozeß $(L^N(t))_{t \in \mathbb{R}^N}$, der die Kovarianzfunktion $E(L^N(s) \cdot L^N(t)) = \frac{1}{2} (|s| + |t| - |s-t|)$ besitzt.

Um Aussagen einfacher formulieren zu können, erweist sich folgende Vereinbarung als zweckmäßig:

Für den Rest der Arbeit sei W^N bzw. $W^{N,d} = (W_1^N, \dots, W_d^N)$ ein auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definierter $(N,1)$ - bzw. (N,d) -dimensionaler Wienerischer Prozeß.

Bevor für Wienerische Prozesse die Eigenschaften (1.2) und (1.3) in Satz 1 erweitert werden, ist eine Definition nötig.

Definition 2.

- (a) Für $T \subset \mathbb{R}_+^N$ sei $\mathcal{U}(T) := \sigma(\Delta W^N(I) : T \supset I \in \mathcal{T}^N)$.
- (b) Für $s \in \mathbb{R}_+^N$ sei $\mathcal{U}(s) := \mathcal{U}(\{t \in \mathbb{R}_+^N : t \leq s\})$.

Bemerkung:

Da $\Delta W^N(I) = \Delta W^N(I^0)$ für $I \in \mathcal{T}^N$, gilt $\mathcal{U}(T^0) = \mathcal{U}(T)$ für alle $T \subset \mathbb{R}_+^N$.

Satz 1.

- (a) $\mathcal{O}(T_1), \dots, \mathcal{O}(T_n)$ sind unabhängig, falls $T_1^0, \dots, T_n^0$ paarweise disjunkt sind.
- (b) $W^N(t^1), W^N(t^2) - W^N(t^1), \dots, W^N(t^n) - W^N(t^{n-1})$ sind unabhängig, falls $0 \leq t^1 \leq \dots \leq t^n$.
- (c) $W^N(t) - W^N(s)$ ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\lambda^N([0, s] \Delta [0, t])^{(n)}$.

Beweis zu (a): Wegen der Bemerkung zu Definition 2 können die

Mengen $T_1, \dots, T_n$ als paarweise disjunkt angenommen werden.

Sind für $1 \leq i \leq n$ paarweise disjunkte in T_i enthaltene Intervalle

$I_i^1, \dots, I_i^1$ gegeben, so liefert Eigenschaft (1.2) die Unabhängig-

keit der Familie $\{\Delta W^N(I_i^k) : 1 \leq k \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$ und damit die Unab-

hängigkeit der Familie $\{(\Delta W^N(I_i^k))_{1 \leq k \leq 1} : 1 \leq i \leq n\}$. Da die Mengen

der Form $\{(\Delta W^N(I_i^k))_{1 \leq k \leq 1} \in B\}$, $T_i \supset I_i^k \in \mathcal{I}^N$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leq n$,

einen durchschnittsstabilen Erzeuger von $\mathcal{O}(T_i)$ bilden, folgt

hieraus (a).

Beweis zu (b): Zu $s, t \in \mathbb{R}_+^N$ mit $s \leq t$ existiert ein Gitter

$(u^k)_{0 \leq k \leq \langle 2 \rangle}$ mit $u^0 = 0$, $u^{\langle 1 \rangle} = s$ und $u^{\langle 2 \rangle} = t$. Offenbar gilt

$$(1.4) \quad W^N(t) - W^N(s) = \sum_{\substack{\langle 1 \rangle \leq k \leq \langle 2 \rangle \\ k \neq \langle 1 \rangle}} \Delta W^N(u^{k-\langle 1 \rangle}, u^k) \quad \text{und} \\ [0, t] - [0, s] = \bigcup_{\substack{\langle 1 \rangle \leq k \leq \langle 2 \rangle \\ k \neq \langle 1 \rangle}} [u^{k-\langle 1 \rangle}, u^k].$$

Für $s \leq t$ ist $W^N(t) - W^N(s)$ daher $\mathcal{O}([0, t] - [0, s])$ -meßbar.

⁽ⁿ⁾ $A \Delta B$ bezeichnet die symmetrische Differenz der Mengen A und B.

Die Behauptung (b) folgt nun mittels (a).

Beweis zu (c): Die Eigenschaften (1.2) und (1.3) ergeben zusammen mit (1.4), daß $W^N(t) - W^N(s \wedge t)$ bzw. $W^N(s) - W^N(s \wedge t)$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $\lambda^N([0, t] - [0, s \wedge t])$ bzw. $\lambda^N([0, s] - [0, s \wedge t])$. Ferner sind $W^N(t) - W^N(s \wedge t)$ und $W^N(s) - W^N(s \wedge t)$ wegen $([0, t] - [0, s \wedge t]) \cap ([0, s] - [0, s \wedge t]) = \emptyset$ nach (a) unabhängig. Die Behauptung (c) folgt daher aus der Darstellung $W^N(t) - W^N(s) = W^N(t) - W^N(s \wedge t) - (W^N(s) - W^N(s \wedge t))$. _____ |

1.2. Erzeugung neuer Wienerischer Prozesse

Dieser Abschnitt zeigt, wie man mittels geeigneter Zeittransformationen und dazu gehöriger Raumtransformationen aus W^N im folgenden benötigte neue Wienerische Prozesse gewinnt, und wie sich für $1 \leq k \leq N$ Teilprozesse von W^N finden lassen, die $(k, 1)$ -dimensionale Wienerische Prozesse sind.

Lemma 1 hilft die dabei auftauchenden Meßbarkeitsfragen zu klären.

Lemma 1.

Sind A bzw. B offene Teilmengen des $\mathbb{R}_+^M$ bzw. $\mathbb{R}_+^N$ und $f: A \rightarrow B$ und $h: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildungen, so ist auch die Abbildung

$$\gamma: \begin{cases} C_0(B) \rightarrow C(A)^* \\ g \mapsto h \circ g \circ f \end{cases} \text{ stetig.}$$

* $C(A)$ ist die Gesamtheit der auf A definierten reellen stetigen Funktionen versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz.

Beweis: Wegen der Metrisierbarkeit der Räume $C(A)$ und $C_0(B)$ genügt es, die Stetigkeit von $\mathcal{F}$ mittels der Konvergenz von Folgen zu untersuchen. Sei dazu $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C_0(B)$, die gegen g konvergiert, und K eine kompakte Teilmenge von A . Da $f[K]$ kompakt ist, konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $f[K]$ gleichmäßig gegen g , und damit konvergiert $(g_n \circ f)_{n \in \mathbb{N}}$ auf K gleichmäßig gegen $g \circ f$. Hieraus wiederum folgt, daß $(\mathcal{F}(g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ auf K gleichmäßig gegen $\mathcal{F}(g)$ strebt; denn für hinreichend große n liegt $g_n \circ f[K]$ in der kompakten Menge $\{x \in \mathbb{R} : \min_{t \in K} |g \circ f(t) - x| \leq 1\}$, auf der h gleichmäßig stetig ist. |

Satz 2.

π sei eine Permutation von $\{1, \dots, N\}$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N \in \mathbb{R} - \{0\}$ und $s \in \mathbb{R}_+^N$. Dann sind die durch

$$\begin{aligned} X_1(\omega; t) &:= w^N(\omega; t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(N)}), \\ X_2(\omega; t) &:= \prod_{i=1}^N \epsilon_i^{-1} w^N(\omega; \epsilon_1^2 t_1, \dots, \epsilon_N^2 t_N) \text{ und} \\ X_3(\omega; t) &:= \Delta w^N(\omega; s, s+t) \end{aligned}$$

definierten Abbildungen von Ω in $C_N(N, 1)$ -dimensionale Wiener-sche Prozesse. X_3 ist dabei unabhängig von $\mathcal{O}(s)$.

Beweis: Man konstruiere gemäß Lemma 1 ($A := B := \mathbb{R}_+^N$)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 \text{ zu } f_1(t) &:= (t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(N)}) \text{ und } h_1(x) := x, \\ \mathcal{F}_2 \text{ zu } f_2(t) &:= (\epsilon_1^2 t_1, \dots, \epsilon_N^2 t_N) \text{ und } h_2(x) := \prod_{i=1}^N \epsilon_i^{-1} x \end{aligned}$$

und für $T \subset \{1, \dots, N\}$

$$\mathcal{F}_T \text{ zu } f_T(t) := s + \sum_{i \in T} t_i e(i) \quad \text{und} \quad h_T(x) := (-1)^{|\overline{T}|}$$

und bezeichne $\overline{T} = \{1, \dots, N\}$ $\mathcal{F}_T$ mit $\mathcal{F}_3$. Für $1 \leq i \leq 3$ stellt $\mathcal{F}_i$ eine stetige und damit meßbare Abbildung von C_N in sich mit $X_i = \mathcal{F}_i \circ W^N$ dar. Also sind X_1 , X_2 und X_3 Zufallsvariablen mit Werten in C_N .

Nachzuweisen bleiben die Eigenschaften (1.2) und (1.3).

Dieser Nachweis ist für X_1 trivial. X_2 und X_3 erfüllen (1.2) und (1.3) wegen der für $0 \leq t \leq u$ geltenden Gleichungen

$$\Delta X_2(t, u) = \prod_{i=1}^N \zeta_i^{-1} \Delta W^N(f_2[t, u]) \text{ und } \Delta X_3(t, u) = \Delta W^N(s+t, s+u).$$

Die zusätzliche Behauptung für X_3 folgt aus Satz 1(a), da X_3 eine $\mathcal{O}(\{t \in \mathbb{R}_+^N: t \geq s\})$ - $\mathcal{F}(C_N)$ -meßbare Abbildung ist. |

Zwei im folgenden wichtige Spezialfälle seien besonders hervorgehoben:

Korollar.

Durch $Y_2(\omega; t) := -W^N(\omega; t)$ und

$$Y_3(\omega; t) := W^N(\omega; s_1+t_1, t_2, \dots, t_N) - W^N(\omega; s_1, t_2, \dots, t_N), s_1 \in \mathbb{R}_+,$$

werden $(N, 1)$ -dimensionale Wiener'sche Prozesse definiert.

Y_3 ist unabhängig von $\mathcal{O}(s_1, 0, \dots, 0)$.

Bemerkung:

Satz 2 läßt sich mit den Bezeichnungen des Beweises auch kurz so formulieren: Das $(N, 1)$ -dimensionale Wiener-Maß ist gegenüber den Transformationen $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_3$ von C_N invariant.

Im Fall der zu Y_2 gehörigen Transformation spricht man daher von der "Symmetrie" der Wiener'schen Prozesse.

Bekanntlich besitzen $(W^1(t))_{0 < t < \infty}$ und $(tW^1(\frac{1}{t}))_{0 < t < \infty}$ aufgefaßt als Zufallsvariablen mit Werten in $C_0(]0, \infty[)$ dieselbe Verteilung. Diese Eigenschaft gestattet insbesondere das Verhalten von $W^1(t)$ für $t \downarrow 0$ auf das für $t \rightarrow \infty$ zurückzuführen. Ähnliche Schlüsse werden in §3 und §4 auch im zeitlich mehrdimensionalen Fall gezogen und gründen sich auf

Satz 3.

Ist $1 \leq k \leq N$, so werden durch

$$X(\omega; t) := W^N(\omega; t)$$

$$\text{und } Y(\omega; t) := \left\{ \prod_{i=1}^k t_i \cdot W^N(\omega; \frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_k}, t_{k+1}, \dots, t_N) \right\} t \in]0, \infty[{}^k \times \mathbb{R}_+^{N-k}$$

Zufallsvariablen mit Werten in $C_0(]0, \infty[{}^k \times \mathbb{R}_+^{N-k})$ definiert, die dieselbe Verteilung besitzen.

Offenbar genügt es, die Aussage für $k=1$ zu beweisen. Da sich dieser Beweis im zeitlich mehrdimensionalen Fall nicht wesentlich von dem Beweis im zeitlich eindimensionalen Fall unterscheidet, wird auf seine Ausführung verzichtet.

Wie in [2] gezeigt, kann für $N \geq k$ aus abzählbar vielen unabhängigen $(k, 1)$ -dimensionalen ein $(N, 1)$ -dimensionaler Wiener-scher Prozeß konstruiert werden. Umgekehrt gilt:

Satz 4.

Ist $1 \leq k \leq N$, so wird durch $X(\omega; t) := W^N(\omega; t, 1, \dots, 1)$, $t \in \mathbb{R}_+^k$, ein $(k, 1)$ -dimensionaler Wiener-scher Prozeß definiert.

Beweis: wegen der für alle $t \in \mathbb{T}^k$ gültigen Beziehung

$\Delta X(I) = \Delta W^N(I \times [0,1]^{N-k})$ erfüllt X die Eigenschaften (1.2) und (1.3) aus Definition 1. Zusammen mit der $\mathcal{O}-\mathcal{L}(C_k)$ -Meßbarkeit, die mittels Lemma 1 folgt, ist dies die Behauptung. |

Daß sich (1,1)-dimensionale Wiener'sche Prozesse auch auf andere Weise aus W^N gewinnen lassen, zeigt

Satz 5.

Ist $f = (f_1, \dots, f_N): \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^N$ eine stetige, isotone Abbildung, so definieren die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} X(\omega; t) &:= W^N(\omega; f(t)) - W^N(\omega; f(0)) \\ Y(\omega; t) &:= W^1(\omega; \prod_{i=1}^N f_i(t) - \prod_{i=1}^N f_i(0)) \end{aligned} \right\} t \in \mathbb{R}_+$$

zwei Zufallsvariablen mit Werten in C_1 , die dieselbe Verteilung besitzen.

Beweis: Nach Lemma 1 sind die Abbildungen

$$\mathcal{J}_X: \begin{cases} C_N \longrightarrow C_1 \\ g \longmapsto g \cdot f - g \cdot f(0) \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{J}_Y: \begin{cases} C_1 \longrightarrow C_1 \\ g \longmapsto g \cdot (\prod_{i=1}^N f_i - \prod_{i=1}^N f_i(0)) \end{cases}$$

stetig und damit meßbar, woraus folgt, daß $X = \mathcal{J}_X \cdot W^N$ und $Y = \mathcal{J}_Y \cdot W^1$ Zufallsvariablen mit Werten in C_1 sind.

Nach Satz 1(c) besitzen $X(t) - X(s)$ und $Y(t) - Y(s)$ für $s, t \in \mathbb{R}_+$

dieselbe Verteilung, nämlich die Normalverteilung zum Erwartungswert 0 und Varianz

$|\prod_{i=1}^N f_i(t) - \prod_{i=1}^N f_i(s)|$. Da ferner X

und Y wegen Satz 1(b) Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen sind,

stimmen ihre endlichdimensionalen Verteilungen überein. Also besitzen sie dieselbe Verteilung.

1.3. Die starke Markov-Eigenschaft

Wie im letzten Abschnitt gezeigt, ist die durch

$X(\omega; t) := \Delta W^N(\omega; s, s+t)$ für $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathbb{R}_+^N$ bei festem $s \in \mathbb{R}_+^N$

definierte Zufallsvariable X ein von der $\mathcal{G}$ -Algebra $\mathcal{O}(s)$ unabhängiger Wiener'scher Prozeß. Diese Aussage bedeutet im Fall

$N=1$, daß W^1 die (schwache) Markov-Eigenschaft besitzt, und kann folglich als Markov-Eigenschaft des $(N,1)$ -dimensionalen Wiener'schen Prozesses angesehen werden.

Es stellt sich nun die Frage, ob sich die für W^1 gültige Verschärfung dieser Eigenschaft zur starken Markov-Eigenschaft auch auf $(N,1)$ -dimensionale Wiener'sche Prozesse ausdehnen läßt.

Eine Antwort hierauf gibt dieser Abschnitt.

Es wird zunächst der Begriff der Stopzeit verallgemeinert.

Definition 3.

(a) Eine Abbildung τ von $(\Omega, \mathcal{O}, \mathbb{P})$ in $\mathbb{R}_+^N \cup \{\infty\}$ heißt "Stopzeit zum Wiener'schen Prozeß W^N ", wenn $\{\tau < t\} \in \mathcal{O}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+^N$.

(b) Ist τ eine Stopzeit zu W^N , so sei

$$\mathcal{O}(\tau+) := \{A \in \mathcal{O} : A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{O}(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+^N\}.$$

Bemerkungen:

1. $\mathcal{O}(\tau+)$ ist eine $\mathcal{G}$ -Algebra, und τ ist $\mathcal{O}(\tau+)$ - $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+^N \cup \{\infty\})$ -meßbar. Dabei ist $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+^N \cup \{\infty\})$ die von $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+^N)$ und $\{\infty\}$ über

$\mathbb{R}_+^N \cup \{\infty\}$ erzeugte σ -Algebra.

7. In der Literatur hat sich für Durchschnitte von $\mathcal{G}$ -Algebren der Gestalt $\bigcap_{t>s} \mathcal{A}(t)$ die Abkürzung $\mathcal{A}(s+)$ eingebürgert. Da für die konstante Stopzeit $\tau=s$ die Gleichung $\mathcal{A}(\tau+)=\bigcap_{t>s} \mathcal{A}(t)$ gilt, ist die hier gewählte Bezeichnung mit der in der Literatur üblichen konsistent.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich folgende starke Markov-Eigenschaft für $(N,1)$ -dimensionale Wiener'sche Prozesse zeigen:

Satz 6.

Es sei τ eine Stopzeit zu W^N mit $\mathbb{P}(\tau < \infty) > 0$ und $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ der zu $\Omega' := \{\tau < \infty\}$ gehörige bedingte Wahrscheinlichkeitsraum.

Dann wird durch

$$X(\omega; t) := \Delta W^N(\omega; \tau(\omega), \tau(\omega) + t) \quad \text{für } \omega \in \Omega' \text{ und } t \in \mathbb{R}_+^N$$

ein $(N,1)$ -dimensionaler Wiener'scher Prozeß auf $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ definiert, der von $\mathcal{A}(\tau+) \cap \mathcal{A}'$ unabhängig ist.

Dieser Satz wird ebenso wie die entsprechende Aussage im zeitlich eindimensionalen bewiesen.

Die starke Markov-Eigenschaft der zeitlich mehrdimensionalen Wiener'schen Prozesse ist nur von geringem Nutzen. Dieser fundamentale Unterschied zum zeitlich eindimensionalen Fall hat seinen Grund in folgendem:

Während die für die Anwendungen wichtigen sogenannten Eintritts-

$$\tau_B := \begin{cases} \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : W^1(t) \in B\}, & \text{falls } \{\dots\} = \emptyset; \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

zum Beispiel für offene und abgeschlossene Teilmengen B von R Stopzeiten zu W^1 darstellen, lassen sich entsprechende Eintrittszeiten für W^N wegen der fehlenden Totalordnung der mehrdimensionalen Zeit gar nicht definieren.

Außer als Beweisverkürzung zum folgenden Satz 7 spielt die starke Markov-Eigenschaft für zeitlich mehrdimensionale Wiener-sche Prozesse im weiteren Verlauf dieser Arbeit keine Rolle mehr.

Ereignisse, die sich durch das Verhalten des $(1,d)$ -dimensionalen Wiener-schen Prozesses in beliebig kleinen Zeitintervallen $[0,t]$ beschreiben lassen, treten nach dem Null-Eins-Gesetz von Blumenthal nur mit Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 ein. Für den Wiener-schen Prozeß $W^{N,d}$ gilt ein entsprechendes Null-Eins-Gesetz:

Satz 7.

Es bezeichne $\mathcal{A}$ den Durchschnitt der für $h>0$ definierten σ -Algebren $\mathcal{A}_h := \sigma(W^{N,d}(t): \min_{1 \leq i \leq N} t_i \leq h)$. Dann nimmt P auf $\mathcal{A}$ nur die Werte 0 und 1 an.

Beweis: Im Fall $d=1$ ist $\tau=0$ eine Stopzeit zu $W^{N,d}$. Nach Satz 6 ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\tau+)$ daher unabhängig von $W^{N,d}$ und damit unabhängig von sich selbst. Hieraus erhält man nun die Behauptung für $d=1$. Im Fall $d>1$ verwende man statt Satz 6 die entsprechende Aussage für räumlich mehrdimensionale Wiener-sche Prozesse, die ebenfalls gilt.

Durch Übergang vom Prozeß $(w^{N,d}(t))_{t>0}$ zum Prozeß

$(\prod_{i=1}^N t_i \cdot w^{N,d}(\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_N}))_{t>0}$ erhält man wegen Satz 3 aus

Satz 7 die folgende duale Aussage:

Korollar.

Es bezeichne $\bar{\mathcal{O}}$ den Durchschnitt der für $h>0$ definierten

σ -Algebren $\bar{\mathcal{O}}_h = \sigma(w^{N,d}(t): \max_{1 \leq i \leq N} t_i \geq h)$. Dann nimmt $\mathbb{P}$ auf

$\bar{\mathcal{O}}$ nur die Werte 0 und 1 an.

1.4. Eine Abschätzung

Während der Beweis der für den $(1,1)$ -dimensionalen Wienersehen

Prozeß w^1 und beliebiges $x \geq 0$ und $u > 0$ gültigen Gleichung

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq t \leq u} w^1(t) \geq x) = 2 \mathbb{P}(w^1(u) \geq x)$$

die starke Markov-Eigenschaft erfordert, gelingt der Nachweis

der in ihr enthaltenen Ungleichung

$$(1.5) \quad \mathbb{P}(\max_{0 \leq t \leq u} w^1(t) \geq x) \leq 2 \mathbb{P}(w^1(u) \geq x)$$

mit Hilfe elementarer Überlegungen. Verfeinert man diese Über-

legungen geeignet, so gelangt man zu einer (1.5) entsprechen-

den Abschätzung für w^N . Sie wird in einer im folgenden benö-

tigten allgemeineren Fassung formuliert in

Satz 8.

Es seien $s, u \in \mathbb{R}_+^N$ mit $s \leq u$ und ξ eine $\mathcal{O}([0, s])$ -meßbare Abbil-

dung von Ω in $\mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(a) \quad \mathbb{P}(\max_{s \leq t \leq u} w^N(t) + \xi \geq x) \leq 2^N \mathbb{P}(w^N(u) + \xi \geq x),$$

$$(b) \quad \mathbb{P}(\min_{s \leq t \leq u} w^N(t) + \xi \leq x) \leq 2^N \mathbb{P}(w^N(u) + \xi \leq x) \quad \text{und}$$

$$(c) \quad \mathbb{P}(\max_{s \leq t \leq u} |w^N(t) + \xi| \geq x) \leq 2^N \mathbb{P}(|w^N(u) + \xi| \geq x).$$

Der Beweis basiert auf folgendem diskreten Analogon zu (a):

Lemma 2.

Es sei $(\xi_k)_{\langle 1 \rangle \leq k \leq 1}$, $1 \in \mathbb{N}^N$, eine Familie unabhängiger und bis auf $\xi_{\langle 1 \rangle}$ symmetrisch verteilter Zufallsvariablen über $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Ist $\xi_k := \sum_{\langle 1 \rangle \leq i \leq k} \xi_i$ für $\langle 1 \rangle \leq k \leq 1$, so gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\max_{\langle 1 \rangle \leq k \leq 1} \xi_k \geq x) \leq 2^N \mathbb{P}(\xi_1 \geq x).$$

Beweis: Die Behauptung wird mittels vollständiger Induktion nach N bewiesen. Der Fall $N=1$ ergibt sich leicht aus dem Beweis des Induktionsschritts von N auf $N+1$; deshalb wird mit diesem Beweis begonnen. Dabei werden Punkte $(i_0, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$ kurz mit (i_0, i) bezeichnet, wobei $i := (i_1, \dots, i_N)$ in $\mathbb{N}^N$ liegt.

Mit der Abkürzung $\eta := \max_{(1, \langle 1 \rangle) \leq (k_0, k) \leq (1_0, 1)} \xi_{(k_0, k)}$ gilt

$$(1.6) \quad \mathbb{P}(\eta \geq x) \leq \mathbb{P}(\max_{\langle 1 \rangle \leq k \leq 1} \xi_{(1_0, k)} \geq x) + \mathbb{P}(\eta \geq x, \max_{\langle 1 \rangle \leq k \leq 1} \xi_{(1_0, k)} < x).$$

Zur Abschätzung des zweiten Summanden wird die lexikographische Ordnung " $<$ " auf $M_{N+1} := \{(k_0, k) : (1, \langle 1 \rangle) \leq (k_0, k) \leq (1_0, 1)\}$ eingeführt. Für $\omega \in \Omega$ sei $\tau(\omega)$ das Minimum der Menge $\{(k_0, k) \in M_{N+1} : \xi_{(k_0, k)} \geq x\}$ bezüglich " $<$ ", falls diese Menge nicht leer ist; andernfalls setze man $\tau(\omega) := \infty$. Offenbar ist τ eine Zufallsvariable.

Da für $(k_0, k) \in M_{N+1}$ die Zufallsvariable $\xi_{(k_0, k)} - \xi_{(1_0, k)}$ unabhängig von dem Ereignis $\{\tau = (k_0, k)\}$ und symmetrisch verteilt ist, läßt sich folgende Ungleichungskette aufstellen:

$$\begin{aligned}
 & P(\eta \geq x, \max_{\langle 1 \rangle \leq k \leq 1} \xi_{(1_0, k)} < x) \\
 & \leq \sum_{(1, \langle 1 \rangle) \leq (k_0, k) \leq (1_0, 1)} P(\tau = (k_0, k), \xi_{(k_0, k)} - \xi_{(1_0, k)} > 0) \\
 & = \sum_{(1, \langle 1 \rangle) \leq (k_0, k) \leq (1_0, 1)} P(\tau = (k_0, k)) \cdot P(\xi_{(k_0, k)} - \xi_{(1_0, k)} > 0) \\
 & \leq P(\eta \geq x) \cdot \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Einsetzen in (1.6) ergibt

$$(1.7) \quad P(\eta \geq x) \leq 2 P(\max_{\langle 1 \rangle \leq k \leq 1} \xi_{(1_0, k)} \geq x),$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung für den Fall $N+1$ durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf die Zufallsvariablen

$$\xi'_k := \sum_{1 \leq k_0 \leq 1_0} \xi_{(k_0, k)}, \quad \langle 1 \rangle \leq k \leq 1, \text{ folgt.}$$

Ersetzt man im Beweis alle auftauchenden $(i_0, i) \in \mathbb{N}^{N+1}$ durch i_0 und N durch 0 , so liefert (1.7) die Behauptung für den Induktionsbeginn.

Beweis zu Satz 8: Zunächst sei auf die aus der Stetigkeit der Pfade folgende Meßbarkeit von $\max_{s \leq t \leq u} w^N(t)$ und $\min_{s \leq t \leq u} w^N(t)$ hingewiesen.

Da die Ungleichungen (a) und (b) die Ungleichung (c) implizieren und ferner (b) mittels der Symmetrie von w^N aus (a) folgt, genügt der Nachweis von (a).

Sei dazu $(t^k)_{0 \leq k \leq 1}$ ein Gitter mit $t^0=0$, $t^{\langle 1 \rangle}=s$ und $t^1=u$.

Lemma 2 liefert für $x \in \mathbb{R}$, angewandt auf die Zufallsvariablen

$$\xi^{\langle 1 \rangle} := w^N(t^{\langle 1 \rangle}) + \xi \quad \text{und} \quad \xi^k := \Delta w^N(t^{k-\langle 1 \rangle}, t^k), \quad \langle 1 \rangle \leq k \leq 1 \text{ und } k \neq \langle 1 \rangle,$$

die wegen Satz 1 alle Voraussetzungen erfüllen,

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq l} W^N(t^k) + \xi \geq x) \leq 2^N \mathbb{P}(W^N(u) + \xi \geq x).$$

Für eine dichte Teilmenge $\{s^n: n \in \mathbb{N}\}$ von $[s, u]$ und $\varepsilon > 0$ gilt daher

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{s \leq t \leq u} W^N(t) + \xi \geq x) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} W^N(s^i) + \xi \geq x - \varepsilon) \\ &\leq 2^N \mathbb{P}(W^N(u) + \xi \geq x - \varepsilon). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn ε gegen 0 konvergiert, die Behauptung.

Bemerkung:

Satz 8 ist für den Fall $\xi=0$ bereits von Zimmerman ([20]) und Paranjape und C. Park ([14]) behandelt worden.

Eine erste Anwendung des Satzes 8 liefert

Satz 9.

Es sei $u \in \mathbb{R}_+^N$, $1 \leq k \leq N$, $h_1, \dots, h_k > 0$ und $x \geq 0$. Dann gilt für

$$\eta := \max \{ |W^N(s_1, \dots, s_k, t_{k+1}, \dots, t_N) - W^N(t)| : \\ 0 \leq s, t \leq u, |s_i - t_i| \leq h_i \text{ für } 1 \leq i \leq k \}$$

$$\mathbb{P}(\eta \geq x) \leq 2^N \sum_{i=1}^k (1 + \frac{u_i}{h_i}) \mathbb{P}(|W^N(u_1, \dots, u_{i-1}, h_i, u_{i+1}, \dots, u_N)| \geq \frac{x}{2^k}).$$

Beweis: Da

$$\eta \leq \sum_{i=1}^k \max_{\substack{0 \leq s, t \leq u \\ |s_i - t_i| \leq h_i}} |W^N(t_1, \dots, t_{i-1}, s_i, t_{i+1}, \dots, t_N) - W^N(t)|$$

und somit

$$\mathbb{P}(\eta \geq x) \leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\max_{\substack{0 \leq s, t \leq u \\ |s_i - t_i| \leq h_i}} |W^N(t_1, \dots, t_{i-1}, s_i, t_{i+1}, \dots, t_N) - W^N(t)| \geq \frac{x}{k}),$$

genügt es, die Behauptung für $k=1$ zu zeigen.

Wegen

$$\{\eta \geq x\} \subset \bigcup_{0 \leq j \leq \frac{u_1}{h_1}} \{ \max(|W^N(t) - W^N(jh_1, t_2, \dots, t_N)| : \\ jh_1 \leq t_1 \leq (j+1)h_1, 0 \leq t_i \leq u_i \text{ für } 2 \leq i \leq N) \geq \frac{x}{3} \}$$

gilt

$$P(\eta \geq x) \leq \sum_{0 \leq j \leq \frac{u_1}{h_1}} P(\max(|W^N(t) - W^N(jh_1, t_2, \dots, t_N)| : \\ jh_1 \leq t_1 \leq (j+1)h_1, 0 \leq t_i \leq u_i \text{ für } 2 \leq i \leq N) \geq \frac{x}{3}).$$

Wendet man nacheinander das Korollar zu Satz 2 und Satz 8 an,

so erhält man für jeden einzelnen Summanden die Abschätzung

$$P(\max(|W^N(t) - W^N(jh_1, t_2, \dots, t_N)| : jh_1 \leq t_1 \leq (j+1)h_1, \\ 0 \leq t_i \leq u_i \text{ für } 2 \leq i \leq N) \geq \frac{x}{3})$$

$$= P(\max_{0 \leq t \leq (h_1, u_2, \dots, u_N)} |W^N(t)| \geq \frac{x}{3})$$

$$\leq 2^N P(|W^N(h_1, u_2, \dots, u_N)| \geq \frac{x}{3}),$$

woraus die Behauptung folgt. _____ |

Zum Abschluß dieses Paragraphen sei darauf hingewiesen, daß die in den Sätzen 1 und 2 aufgestellten Eigenschaften der $(N, 1)$ -dimensionalen Wiener'schen Prozesse im folgenden ohne Zitat benutzt werden.

§2. Der Träger des $(N,1)$ -dimensionalen Wiener-Maßes

2.1. Der Hauptsatz

Ist X eine Zufallsvariable mit Werten in einem topologischen Raum mit abzählbarer Basis, so gibt es eine kleinste abgeschlossene Menge F derart, daß X mit Wahrscheinlichkeit 1 in F liegt, nämlich den Träger der Verteilung von X .

Da der Wiener-Prozeß W^N eine Zufallsvariable mit Werten in C_N , einem topologischen Raum mit abzählbarer Basis, darstellt, ist es also sinnvoll, nach der kleinsten abgeschlossenen Menge F mit $P(W^N \in F) = 1$, oder anders formuliert, nach dem Träger des $(N,1)$ -dimensionalen Wiener-Maßes zu fragen.

Die Antwort auf diese Frage gibt Theorem 1 auf Seite 32, das besagt, daß der Träger des $(N,1)$ -dimensionalen Wiener-Maßes der gesamte Raum C_N ist.

Inhalt dieses Abschnittes ist der Beweis zu Theorem 1. Er zerfällt in drei Teile, deren Ergebnisse in den Sätzen 1, 2 und 3 zusammengefaßt sind. Die Dreiteilung entspricht dem in [6] geführten Beweis, wo Theorem 1 für den Fall $N=1$ nachgewiesen wird.

In Teil 1 wird gezeigt, daß in jedem ε -Streifen um die Nullfunktion in $C_0([0,1]^N)$ mit positiver Wahrscheinlichkeit Pfade $(W^N(t))_{0 \leq t \leq 1}$ fallen. Um dies in Satz 1 kurz formulieren zu können, bezeichne $\|\cdot\|_N$ die Supremumsnorm auf $C_0([0,1]^N)$. Dabei erweist es sich für spätere Anwendungen als zweckmäßig, den

Fall $N=0$ mit einzuschließen. In diesem Fall wird der Raum $(C_0([0,1]^N), \|\cdot\|_N)$ in natürlicher Weise als die reelle Zahlen-gerade mit der euklidischen Norm aufgefaßt.

Satz 1.

Für jedes $\epsilon > 0$ gilt $P(\|W^N\|_N \leq \epsilon) > 0$.

Der Beweis zu Satz 1 für $N=1$ benutzt entscheidend die starke Markov-Eigenschaft bezüglich der Eintrittszeit zu $(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$.

Wegen der Schwierigkeit, Eintrittszeiten auch bei mehrdimensionaler Zeit zu definieren (vgl. Abschnitt 1.5), scheitert dieses Beweisverfahren für $N \geq 2$. Das die Eintrittszeit in diesem Fall ersetzende Hilfsmittel ist

Lemma 1.

Es seien γ, δ und ϵ beliebige positive Zahlen. Dann ist mit

$$P(\max_{0 \leq t \leq \delta} \|W^N(t, \cdot)\|_{N-1} \leq \epsilon) > 0 \quad \text{auch}$$

$$P(\max_{0 \leq t \leq \delta} \|W^N(t, \cdot)\|_{N-1} \leq 2\epsilon, \|W^N(2\delta, \cdot)\|_{N-1} \leq 2\delta) > 0.$$

Beweis: Es bezeichne $A(g)$ für $g \in C_0([0,1]^{N-1})$ das Ereignis

$$\{\max_{0 \leq t \leq \delta} \|W^N(t, \cdot)\|_{N-1} \leq \epsilon, \|W^N(\delta, \cdot) - g\|_{N-1} \leq \delta\}.$$

Ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $C_0([0,1]^{N-1})$ dichtliegende Folge, so gilt nach Voraussetzung

$$P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(g_n)) > 0. \text{ Also existiert ein } g \in C_0([0,1]^{N-1}) \text{ mit } P(A(g)) > 0.$$

Wegen der Symmetrie und der Markov-Eigenschaft ist mit $P(A(g))$ auch $P(B(g))$ positiv, wenn

$$B(g) := \{\max_{\delta \leq t \leq 2\delta} \|W^N(t, \cdot) - W^N(\delta, \cdot)\|_{N-1} \leq \epsilon, \\ \|W^N(2\delta, \cdot) - W^N(\delta, \cdot) + g\|_{N-1} \leq \delta\}.$$

Ferner sind $A(g)$ und $B(g)$ unabhängig, so daß auch $P(A(g) \cap B(g)) > 0$ gilt. Die Behauptung folgt daher aus

$$A(g) \cap B(g) = \left\{ \max_{0 \leq t \leq 2\delta} \|W^N(t, \cdot)\|_{N-1} \leq 2\varepsilon, \|W^N(2\delta, \cdot)\|_{N-1} \leq 2\varepsilon \right\}. \quad _ |$$

Beweis zu Satz 1: Da für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung

$$m(\omega; \cdot) : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \|W^N(\omega; t, \cdot)\|_{N-1} \end{cases}$$

stetig ist mit $m(\omega; 0) = 0$, existiert eine natürliche Zahl n mit

$$(2.1) \quad P\left(\max_{0 \leq t \leq \frac{1}{2n}} \|W^N(t, \cdot)\|_{N-1} \leq \frac{\varepsilon}{4}\right) > 0.$$

Die für $1 \leq k \leq n$ definierten Ereignisse

$$A_k := \left\{ \max_{\frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n}} \|W^N(t, \cdot) - W^N\left(\frac{k-1}{n}, \cdot\right)\|_{N-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \right. \\ \left. \|W^N\left(\frac{k}{n}, \cdot\right) - W^N\left(\frac{k-1}{n}, \cdot\right)\|_{N-1} \leq \frac{\varepsilon}{2n} \right\}$$

sind unabhängig und besitzen alle dieselbe Wahrscheinlich-

keit, die nach Lemma 1 wegen (2.1) positiv ist. $\{\|W^N\|_N \leq \varepsilon\}$

umfaßt $\bigcap_{k=1}^n A_k$; also gilt $P(\|W^N\|_N \leq \varepsilon) \geq P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1)^n > 0$. _ |

Im zweiten Beweisschritt zu Theorem 1 wird die Wahrscheinlich-

keit der Pfade, die zusätzlich zu der Forderung aus Teil 1

auch eine Bedingung zum Zeitpunkt $\langle 1 \rangle$ erfüllen, als positiv

nachgewiesen.

Satz 2.

Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes Teilintervall I von $[-\varepsilon, \varepsilon]$ mit posi-

tiver Länge gilt $P(\|W^N\|_N \leq \varepsilon, W^N(\langle 1 \rangle) \in I) > 0$.

Auch dieses Resultat beweist Freedman im Fall $N=1$ mit Hilfe

für $T \subset J := \{1, \dots, N\}$ definierten Punkte werden nun Ereignisse $A_T, T \subset J$, eingeführt:

$$\begin{aligned} A_\emptyset &:= \left\{ \max_{t_\emptyset \leq s_\emptyset \leq u_\emptyset} |\Delta w^N(t_\emptyset, s_\emptyset)| \leq \varepsilon', |\Delta w^N(t_\emptyset, u_\emptyset)| \leq \eta' \right\} \\ &= \left\{ \max_{0 \leq s \leq t} |w^N(s)| \leq \varepsilon', |w^N(t)| \leq \eta' \right\}, \end{aligned}$$

$$A_T := \left\{ \max_{t_T \leq s_T \leq u_T} |\Delta w^N(t_T, s_T)| \leq \delta \right\} \quad \text{für } \emptyset \neq T \subset J.$$

Beachtet man, daß $w^N(r)$ für $0 \leq r \leq \langle 1 \rangle$ mit geeignet gewählten $s_T \in [t_T, u_T]$ als Summe $\sum_{T \subset J} \Delta w^N(t_T, s_T)$ dargestellt werden kann,

so folgt für $\omega \in \bigcap_{T \subset J} A_T$ die Ungleichung

$$\|w^N(\omega)\|_N = \max_{0 \leq r \leq \langle 1 \rangle} |w^N(\omega; r)| \leq \varepsilon' + (2^N - 1)\delta \leq \varepsilon.$$

Da bei der Darstellung von $w^N(\omega; \langle 1 \rangle)$ als Summand auch

$w^N(\omega; t) = \Delta w^N(\omega; t_\emptyset, u_\emptyset)$ auftaucht, gilt außerdem

$$|w^N(\omega; \langle 1 \rangle) - w^N(\omega; t)| \leq (2^N - 1)\delta,$$

und damit wegen $\omega \in A_\emptyset$ und der Wahl von δ, ε' und η' auch

$w^N(\omega; \langle 1 \rangle) \in I$. Also ist $\bigcap_{T \subset J} A_T$ enthalten in $\{|w^N|_N \leq \varepsilon, w^N(\langle 1 \rangle) \in I\}$.

Zum Nachweis der Behauptung genügt es daher wegen der Unabhängigkeit der Ereignisse $A_T, T \subset J$, zu zeigen, daß alle $P(A_T)$ positiv sind. Für $T = \emptyset$ folgt dies aus der Wahl von t und für $T \neq \emptyset$ aus Satz 1.

Im nun folgenden dritten Beweisabschnitt zu Theorem 1 wird

neben $\|w^N(\omega)\|_N \leq \varepsilon$ verlangt, daß $w^N(\omega)$ auf der Menge

$\{(t, \langle 1 \rangle) \in [0, 1]^N: t \in [0, 1]^k\}$ eine beliebig vorgegebene Funktion

$f \in C_0([0, 1]^k)$ mit $\|f\|_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gut approximiert. Schrittweise wird

dabei k von 0 auf N erhöht und gezeigt, daß die Menge der $w \in \Omega$, die den genannten Bedingungen genügen, positive Wahrscheinlichkeit hat.

Satz 3.

Es sei $\varepsilon > 0$ und $0 \leq k \leq N$. Dann ist für $f \in C_0([0, 1]^k)$ mit $\|f\|_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$
 $P(\|W^N\|_N \leq \varepsilon, \|W^N(\cdot, \langle 1 \rangle) - f\|_k \leq \eta) > 0$ für alle $\eta > 0$.

Beweis: Der Beweis wird durch vollständige Induktion über k geführt.

Im Fall $k=0$ ist f eine in der $\frac{\varepsilon}{2}$ -Umgebung von 0 liegende reelle Zahl, und die Behauptung folgt aus Satz 2.

Beim Beweis des Induktionsschritts von $k-1$ auf k kann ohne Einschränkung $\eta \leq \varepsilon$ angenommen werden. Man wähle $n \in \mathbb{N}$ zu $\varepsilon' := \frac{\eta}{2^{N-k+1}}$ so, daß

$$(2.2) \quad \|f(\cdot, t_k) - f(\cdot, t'_k)\|_{k-1} \leq \frac{\varepsilon'}{2}, \text{ falls } |t_k - t'_k| \leq \frac{1}{n}.$$

Für $A := \overbrace{\langle 1 \rangle \in (1_k, \dots, 1_N) \in \langle n \rangle}^{A(1_k, \dots, 1_N)}$ mit

$$A(1_k, \dots, 1_N) :=$$

$$\{ \max\{ | \Delta W^N((0, \frac{1_{k-1}}{n}, \dots, \frac{1_{N-1}}{n}), t) | : 0 \leq t_1, \dots, t_{k-1} \leq 1, \frac{1_{i-1}}{n} \leq t_i \leq \frac{1_i}{n} \}$$

$$\text{für } k \leq i \leq N \} \leq \varepsilon' n^{-N+k} \}$$

$$\cap \{ \max_{0 \leq t_1, \dots, t_{k-1} \leq 1} | \Delta W^N((0, \frac{1_{k-1}}{n}, \dots, \frac{1_{N-1}}{n}), (t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1_k}{n}, \dots, \frac{1_N}{n})) - n^{-N+k} | f(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1_k}{n}) - f(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1_{k-1}}{n}) | \leq \varepsilon' n^{-N+k-1} \}$$

gilt dann $A \subset B := \{ \|W^N\|_N \leq \varepsilon, \|W^N(\cdot, \langle 1 \rangle) - f\|_k \leq \eta \}$ und $P(A) > 0$.

Diese beiden Aussagen, aus denen die Behauptung für den Fall k folgt, sind nun zu beweisen.

Beweis zu "A⊂B": 1. Zunächst werden einige Hilfsüberlegungen angestellt.

Für $g \in C_0([0,1]^N)$, definiert durch $g(t) := f(t_1, \dots, t_k) \cdot \prod_{i=k+1}^N t_i$, gilt

$$(2.3) \quad n^{-N+k} (f(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1_k}{n}) - f(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1_{k-1}}{n})) \\ = \Delta g((0, \frac{1_{k-1}}{n}, \dots, \frac{1_{N-1}}{n}), (t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1_k}{n}, \dots, \frac{1_N}{n})) \\ \text{für } 0 \leq t_i \leq 1 \text{ und } 1 \leq i \leq n.$$

Es sei $t \in [0,1]^N$ und $(m_k, \dots, m_N) \in \{1, \dots, n+1\}^{N-k+1}$ dazu so gewählt, daß $(t_k, \dots, t_N) \in \prod_{i=k}^N [\frac{m_i-1}{n}, \frac{m_i}{n}]$. Für $l = (l_k, \dots, l_N)$ mit $\langle l \rangle \leq l \leq (m_k, \dots, m_N)$ definiere man folgende Punkte in $\mathbb{R}_+^N$:

$$s^l := \sum_{i=k}^N \frac{l_i-1}{n} e(i) \text{ und } u^l := \sum_{i=1}^{k-1} t_i e(i) + \sum_{i=k}^N (\frac{l_i}{n} \wedge t_i) e(i).$$

Dann gilt für $h \in C_0([0,1]^N)$

$$(2.4) \quad h(t) = \sum_{\langle l \rangle \leq l \leq m} \Delta h(s^l, u^l)$$

und

$$(2.5) \quad h(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_k-1}{n}, \dots, \frac{m_N-1}{n}) = \sum_{\langle l \rangle \leq l \leq m} \Delta h(s^l, u^l).$$

2. Mit Hilfe der Ungleichung

$$(2.6) \quad |w^N(t)| \leq |w^N(t) - w^N(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_k-1}{n}, \dots, \frac{m_N-1}{n})| \\ + |w^N(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_k-1}{n}, \dots, \frac{m_N-1}{n}) - g(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_k-1}{n}, \dots, \frac{m_N-1}{n})| \\ + |g(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_k-1}{n}, \dots, \frac{m_N-1}{n})|$$

soll im folgenden $|w^N(\omega; t)| \leq \varepsilon$ für $\omega \in A$ nachgewiesen werden.

Sei also $\omega \in A$; dann ergibt sich unter Verwendung von (2.4) und

(2.5):

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad & |W^N(\omega; t) - W^N(\omega; t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_k-1}{n}, \dots, \frac{m_N-1}{n})| \\
 & \leq \sum_{\substack{<1>\leq l \leq m \\ 1 \leq m}} |\Delta W^N(\omega; s^1, u^1)| \\
 & \leq \varepsilon' n^{-N+k} \left(\prod_{i=k}^N m_i - \prod_{i=k}^N (m_i - 1) \right) \\
 & \leq \varepsilon' n^{-N+k} ((n+1)^{N-k+1} - n^{N-k+1}) \\
 & \leq \varepsilon' n^{-N+k} \cdot 2^{N-k+1} \cdot n^{N-k} \\
 & = \frac{\eta}{4}.
 \end{aligned}$$

Die vorletzte Abschätzung folgt aus der für $x \geq 1$ und $q \in \mathbb{N}$ gültigen Beziehung $(x+1)^q - x^q = \sum_{p=0}^{q-1} \binom{q}{p} x^p \leq 2^q x^{q-1}$.

Berücksichtigt man (2.5), (2.3) und die Tatsache, daß ω in A liegt, so erhält man

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad & |W^N(\omega; t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_k-1}{n}, \dots, \frac{m_N-1}{n}) - g(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_k-1}{n}, \dots, \frac{m_N-1}{n})| \\
 & \leq \sum_{<1>\leq l \leq m} |\Delta W^N(\omega; s^1, u^1) - \Delta g(s^1, u^1)| \\
 & = \sum_{<1>\leq l \leq m} |\Delta W^N(\omega; s^1, u^1) \\
 & \quad - n^{-N+k} (f(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1}{n^k}) - f(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1}{n^{k-1}}))| \\
 & \leq \varepsilon' n^{-N+k-1} \prod_{i=k}^N (m_i - 1) \\
 & \leq \frac{\eta}{4}.
 \end{aligned}$$

Aus (2.6) folgt nun mittels (2.7) und (2.8) und der wegen

$\|f\|_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$ geltenden Ungleichung $|g(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_k-1}{n}, \dots, \frac{m_N-1}{n})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$(2.9) \quad |W^N(\omega; t)| \leq \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \quad \text{für } \omega \in A.$$

3. Schließlich gilt für $\omega \in A$

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad & |W^N(\omega; t_1, \dots, t_k, 1, \dots, 1) - f(t_1, \dots, t_k)| \\
 & \leq |W^N(\omega; t_1, \dots, t_k, 1, \dots, 1) - W^N(\omega; t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_k-1}{n}, 1, \dots, 1)| +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + |W^N(w; t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_{k-1}}{n}, 1, \dots, 1) \\
 & \quad - g(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_{k-1}}{n}, 1, \dots, 1)| \\
 & + |g(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{m_{k-1}}{n}, 1, \dots, 1) - g(t_1, \dots, t_k, 1, \dots, 1)| \\
 & \leq \eta.
 \end{aligned}$$

Denn der erste und zweite Summand können gemäß (2.7) bzw. (2.8) angewandt auf $t = (t_1, \dots, t_k, 1, \dots, 1)$ durch $\frac{\eta}{4}$ abgeschätzt werden, und der dritte ist wegen (2.2) kleiner oder gleich $\frac{\epsilon'}{2}$.

Da t ein beliebiger Punkt in $[0, 1]^N$ war, ist mit (2.9) und (2.10) die behauptete Inklusion $A \subset B$ bewiesen.

Beweis zu " $P(A) > 0$ ": Offenbar liegt $A(l_k, \dots, l_N)$ in

$$\bigcap_{i=k}^N ([0, 1]^{k-1} \times \prod_{j=i}^N [\frac{l_i-1}{n}, \frac{l_i}{n}]).$$

Die Ereignisse $A(l_k, \dots, l_N)$,

$\langle 1 \rangle \leq (l_k, \dots, l_N) \leq \langle n \rangle$, sind daher unabhängig, und es genügt

folglich zu zeigen, daß jedes $A(l_k, \dots, l_N)$ positive Wahrscheinlichkeit besitzt.

$$P(A(l_k, \dots, l_N))$$

$$\begin{aligned}
 & = P(\max\{|W^N(t)| : 0 \leq t_1, \dots, t_{k-1} \leq 1 \text{ und } 0 \leq t_k, \dots, t_N \leq \frac{1}{n}\} \leq \epsilon' n^{-N+k}, \\
 & \quad \max_{0 \leq t_1, \dots, t_{k-1} \leq 1} |W^N(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \\
 & \quad - n^{-N+k}(f(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1}{n}) - f(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{l_k-1}{n}))| \leq \epsilon' n^{-N+k-1}) \\
 & = P(\max_{0 \leq t \leq \langle 1 \rangle} |n^{-\frac{N-k+1}{2}} W^N(t)| \leq \epsilon' n^{-N+k}, \\
 & \quad \max_{0 \leq t_1, \dots, t_{k-1} \leq 1} |n^{-\frac{N-k+1}{2}} W^N(t_1, \dots, t_{k-1}, 1, \dots, 1) \\
 & \quad - n^{-N+k}(f(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{1}{n}) - f(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{l_k-1}{n}))| \leq \epsilon' n^{-N+k-1}) \\
 & = P(\|W^N\|_N \leq \epsilon' n^{\frac{N-k+1}{2}-N+k}, \|W^N(\cdot, \langle 1 \rangle) - f^*\|_{k-1} \leq \epsilon' n^{-\frac{N-k+1}{2}})
 \end{aligned}$$

mit $f'(t) := n^{\frac{N-k+1}{2}-N+k} (f(t, \frac{1}{n^k}) - f(t, \frac{1}{n^{k-1}}))$ für $t \in [0, 1]^{k-1}$.

Da wegen (2.2) die Ungleichung $\|f'\|_{k-1} \leq \xi n^{\frac{N-k+1}{2}-N+k}$ gilt, kann auf die letzte Zeile der obigen Gleichungskette die Induktionsvoraussetzung angewendet werden, und es folgt $\mathbb{P}(A(l_k, \dots, l_N)) > 0$.

Mit Hilfe von Satz 3 läßt sich nun der Hauptsatz dieses Abschnitts beweisen.

Theorem 1.

Für $t \in \mathbb{R}_+^N$ und $f \in C_0([0, t])$ gilt $\mathbb{P}(\max_{0 \leq s \leq t} |W^N(s) - f(s)| \leq \varepsilon) > 0$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. der Träger des $(N, 1)$ -dimensionalen Wiener-Maßes ist C_N .

Beweis: Falls $\prod_{i=1}^N t_i = 0$, ist $C_0([0, t]) = \{0\}$; die Behauptung ist daher trivial.

Ist $\prod_{i=1}^N t_i > 0$, so gilt mit der Abkürzung $\delta = (\prod_{i=1}^N t_i)^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\max_{0 \leq s \leq t} |W^N(s) - f(s)| \leq \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(\max_{0 \leq s \leq 1} |\delta W^N(s_1 t_1, \dots, s_N t_N) - \varepsilon f(s_1 t_1, \dots, s_N t_N)| \leq \varepsilon \cdot \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(\|W^N - f'\|_N \leq \varepsilon \cdot \varepsilon), \end{aligned}$$

wobei $f'(s) := \varepsilon f(s_1 t_1, \dots, s_N t_N)$ für $s \in [0, 1]^N$.

Mittels Satz 3 folgt

$$\mathbb{P}(\|W^N - f'\|_N \leq \varepsilon \cdot \varepsilon) \geq \mathbb{P}(\|W^N\|_N \leq 2\|f'\|_N + 1, \|W^N - f'\|_N \leq \varepsilon \cdot \varepsilon) > 0$$

und damit die Behauptung.

Die dem Theorem 1 entsprechende Aussage für (N, d) -dimensionale Wiener-Prozesse wird im nächsten Abschnitt gebraucht. Sie

folgt mit Hilfe der Bemerkung 2 zu Definition 1.1 unmittelbar aus Theorem 1 und wird festgehalten in einem

Korollar.

Der Träger des (N,d) -dimensionalen Wiener-Maßes ist C_N^d . |

2.2. Eine Anwendung

Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{t>0} \{W^{N,d}(t)=x\}\right) = 0 \text{ bzw. } 1, \text{ falls } 2N \leq d \text{ bzw. } 2N > d \text{ (die Meß-}$$

barkeit von $\bigcup_{t>0} \{W^{N,d}(t)=x\}$ folgt aus der Darstellung

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \inf\{|W^{N,d}(t)-x| : t \in \mathbb{Q}^N \text{ und } \langle \frac{1}{n} \rangle \leq t \leq \langle n \rangle\} = 0 \right\}.$$

Dieses für den Fall $N=1$ klassische Ergebnis wurde 1973 von Orey und Pruitt in [12] bewiesen. Wendet man hierauf den Satz von Fubini in der gleichen Art an, wie es im Abschnitt 5.2 mehrmals geschieht, so erhält man für $2N > d$:

$$\mathbb{P}(\{\omega : \overline{\lambda^d(\{W^{N,d}(\omega;t) : t \geq 0\})} = 0\}) = 1.$$

Es stellt sich nun für $2N > d$ die Frage, ob $\{W^{N,d}(\omega;t) : t \geq 0\}$ für $\mathbb{P}$ -fast alle $\omega \in \Omega$ den ganzen Raum $\mathbb{R}^d$ ausfüllt.

Zu zeigen, daß diese Frage wenigstens für $N \geq d$ zu bejahen ist, ist Ziel dieses Abschnitts.

Zu diesem Zweck wird außer dem Korollar zu Theorem 1 folgende Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes gebraucht:

Lemma 3.

Es seien $[s,u]$ und $[x,z]$ Intervalle im $\mathbb{R}^N$ und $f=(f_1, \dots, f_N)$ eine stetige Abbildung von $[s,u]$ in $\mathbb{R}^N$. Gilt dann für $1 \leq k \leq N$

$$f_k(t) \begin{cases} < x_k, & \text{falls } t_k = s_k; \\ > z_k, & \text{falls } t_k = u_k, \end{cases}$$

so existiert zu jedem $y \in [x, z]$ ein $t \in [s, u]$ mit $f(t) = y$.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus [1], Satz 5.9.1. |

Das angekündigte Ergebnis wird in einer verschärften Fassung formuliert in

Theorem 2.

Es seien $s, u \in \mathbb{R}_+^{N-1}$ mit $s < u$. Dann gilt für $N \geq d$

$$\tilde{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{x \in \mathbb{R}^d} \bigcup_{\substack{s \leq t \leq u \\ n \leq t_N}} \{W^{N,d}(t, t_N) = x\}\right) = 1^{(*)}.$$

Beweis: Wegen Satz 1.4 genügt es, den Fall $N = d$ zu betrachten.

Die Mengen $A_n := \bigcup_{\substack{s \leq t \leq u \\ n \leq t_N \leq 2n}} \{W^{N,N}(t, t_N) = x\}, n \in \mathbb{N},$

sind meßbar; denn sie lassen sich darstellen als

$$\bigcup_{\substack{\langle -\sqrt{n} \rangle \leq x \leq \langle \sqrt{n} \rangle \\ x \in \mathbb{Q}^N}} \left\{ \inf\{|W^{N,N}(t, t_N) - x| : s \leq t \leq u, n \leq t_N \leq 2n, (t, t_N) \in \mathbb{Q}^N\} = 0 \right\}.$$

Mit den Bezeichnungen des Korollars zu Satz 1.7 gilt sogar

$A_n \in \overline{\mathcal{O}}_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es folgt, daß $A_\infty := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ in $\overline{\mathcal{O}}$ liegt, also

$P(A_\infty)$ nur 0 oder 1 sein kann. Da offenbar

$$A_\infty \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{x \in \mathbb{R}^N} \bigcup_{\substack{s \leq t \leq u \\ n \leq t_N}} \{W^{N,N}(t, t_N) = x\},$$

genügt es, $P(A_\infty) > 0$ nachzuweisen.

Nach dem Lemma von Fatou ist $P(A_\infty) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$. Außerdem be-

sitzen alle Ereignisse A_n dieselbe Wahrscheinlichkeit. Es reicht

(*) Die $\tilde{\mathcal{O}}$ -Meßbarkeit dieser Menge folgt aus der Bemerkung zu Satz 3.3.

also aus, $\mathbb{P}(A_1) > 0$ zu zeigen.

Dazu sei

$$B := \bigcap_{k=1}^N \left\{ (s, s_N) \leq (t, t_N) \leq (u, u_N) \begin{array}{l} \max_{t_k = s_k} w_k^N(t, t_N) < -1, \\ \min_{t_k = u_k} w_k^N(t, t_N) > 1 \end{array} \right\},$$

wobei $s_N := 1$ und $u_N := 2$.

B ist nach Lemma 3 in A_1 enthalten. Ferner besitzt B eine Darstellung der Form $\{w^{N,N} \in G\}$ mit einer geeigneten nichtleeren offenen Teilmenge G von C_N^d . Aus dem Korollar zu Theorem 1 folgt daher, daß $\mathbb{P}(B)$ und damit auch $\mathbb{P}(A_1)$ positiv ist. |

Bemerkungen:

1. Ob die Menge $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{x \in \mathbb{R}^d} \bigcup_{\substack{s \leq t \leq u \\ n \leq t_N}} \{w^{N,d}(t, t_N) = x\}$ aus Theorem 2

$\mathcal{A}$ -meßbar ist, konnte nicht geklärt werden.

2. Das eingangs gestellte Problem ist für $N < d < 2N$ weiterhin

offen.

§3. Das asymptotische Verhalten

Das asymptotische Verhalten des (1,1)-dimensionalen Wiener-
schen Prozesses $W^1(h)$ für $h \rightarrow \infty$ wird beschrieben durch das Ge-
setz vom iterierten Logarithmus

$$(3.1) \quad P(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^1(h)}{(2h \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = 1) = 1$$

und durch die dazu äquivalente Gleichung

$$P(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^1(h)}{(2h \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = -1) = 1.$$

Bei der Verallgemeinerung dieses Gesetzes auf den Fall (N,1)-
dimensionaler Wiener'scher Prozesse lassen sich mehrere Wege ein-
schlagen, die im Fall $N=1$ mit (3.1) übereinstimmen. So haben

Zimmerman ([20]) und Faranjanpe und O. Park ([14]) gezeigt, daß

$$P(\lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{t \geq h} \frac{W^N(t)}{(2N \prod_{i=1}^N t_i \log(\log \prod_{i=1}^N t_i))^{\frac{1}{2}}} = 1) = 1$$

und

$$(3.2) \quad P(\lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{t_1, \dots, t_k \geq h} \sup_{(t_{k+1}, \dots, t_N) \in A} \frac{W^N(t)}{(2 \prod_{i=1}^N t_i \log(\prod_{i=1}^N \log t_i))^{\frac{1}{2}}} = 1) = 1$$

für $1 \leq k \leq N$ und nichtleere kompakte Teilmengen A von $]0, \infty[^{N-k}$
(in [20] sind diese Gleichungen für den Fall $N=2$, in [14] für
allgemeines N bewiesen).

In diesem Paragraphen soll die folgende Verallgemeinerung des
Gesetzes vom iterierten Logarithmus nachgewiesen werden:

$$(3.3) \quad P(\bigcap_{(t, \alpha) \in R_\infty} \{ \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(t + \alpha h)}{(2 \prod_{1 \leq i \leq N} (t_i + \alpha_i h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \}) = 1$$

für $R_\infty := \{(t, \alpha) : t \in \mathbb{R}_+^N, \alpha \in \mathbb{R}_+^N - \{0\} \text{ mit } t \vee \alpha > 0\}$.

Das bedeutet: Für $\mathbb{P}$ -fast alle ω gehorcht die Funktion $w^N(\omega)$ auf jedem Strahl $(t+\alpha h)_{h \geq 0}$, der nicht ganz in $d\mathbb{R}_+^N$ liegt, einem Gesetz vom iterierten Logarithmus.

Entsprechende Ergebnisse werden auch für das Verhalten bei Annäherung an endliche Punkte auf Geraden hergeleitet.

Die mit diesen Ergebnissen zusammenhängenden Meßbarkeitsprobleme, die ähnlich auch in §4 auftreten, sollen im nun folgenden ersten Abschnitt dieses Paragraphen behandelt werden.

3.1. Meßbarkeit

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Frage nach der Meßbarkeit eines überabzählbaren Durchschnitts von Ereignissen, wie er zum Beispiel unter (3.3) auftritt. Allgemeiner soll für $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^N)$, $\mathcal{L}(C_N \times D) = \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{R}})$ -meßbare Abbildungen $\mathcal{A}_h$ von $C_N \times D$ in $\tilde{\mathbb{R}}^*$, $0 < h < \infty$, und $B \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{R}})$ die Meßbarkeit der Menge

$$(3.4) \quad \bigcap_{d \in D} \{ \omega : \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \mathcal{A}_h(w^N(\omega), d) \in B \}$$

untersucht werden.

Bevor Satz 2 eine hinreichende Bedingung für die $\mathcal{A}$ -Meßbarkeit der Menge (3.4) angibt, wird in Satz 1 ein einfaches Kriterium für die im folgenden oft benötigte $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{R}})$ -Meßbarkeit der Abbildung $\omega \mapsto \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \mathcal{A}_h(w^N(\omega))$ für $\mathcal{A}_h: C_N \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ hergeleitet.

$^* \tilde{\mathbb{R}}$ ist die durch $-\infty$ und $+\infty$ erweiterte reelle Zahlengerade.

Satz 1.

Sind die Abbildungen $\Lambda_n: C_N \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ für $0 < n < \infty$ nach unten halbstetig, so wird durch $\xi(\omega) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n(w^n(\omega))$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\tilde{\mathbb{R}}$ definiert.

Beweis: Da die Abbildungen $\sup_{n \geq n} \Lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, als Supremum nach unten halbstetiger Abbildungen selbst nach unten halbstetig und damit $\mathcal{L}(C_N)$ - $\mathcal{L}(\tilde{\mathbb{R}})$ -meßbar sind, ist $\Lambda := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{h \geq n} \Lambda_h$ ebenfalls $\mathcal{L}(C_N)$ - $\mathcal{L}(\tilde{\mathbb{R}})$ -meßbar. Aus $\xi = \Lambda \circ w^N$ folgt nun die Behauptung. |

Bemerkung:

Daß die Voraussetzung "nach unten halbstetig" nicht durch "nach oben halbstetig" ersetzt werden kann, zeigt Beispiel 2 zu Satz 2.

Satz 2.

Es sei $D \in \mathcal{F}_\infty(\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^N)$, $\Lambda_n: C_N \times D \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ für $0 < n < \infty$ nach unten halbstetig und $\Lambda := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n$. Dann stellt $\bigcap_{d \in D} \{\omega: \Lambda(w^N(\omega), d) \geq x\}$ für alle $x \in \tilde{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}$ -meßbare Menge dar.

Beweis: 1. Da w^N eine Zufallsvariable mit Werten in C_N ist, genügt es, die $\mathcal{L}(C_N)$ -Meßbarkeit von $\Lambda := \bigcap_{d \in D} \{f \in C_N: \Lambda(f, d) \geq x\}$ nachzuweisen. Dabei kann offenbar $x > -\infty$ und wegen

$$\bigcap_{d \in D} \{f: \Lambda(f, d) \geq \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{d \in D} \{f: \Lambda(f, d) \geq n\}$$

auch $x < \infty$ angenommen werden. Ferner kann man sich auf kompakte Teilmengen D von $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^N$ beschränken. Denn zu D existieren nach Voraussetzung $D_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^N)$ mit $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, also auch mit $D = \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} (D_n \cap [-m, m]^{2N})$.

2. Da die Abbildungen Λ_h , $0 < h < \infty$, nach unten halbstetig sind, sind die Mengen $B_m := \bigcap_{h \geq m} \{(f, d) \in C_N \times D : \Lambda_h(f, d) \leq x - \frac{1}{m}\}$ abgeschlossene Teilmengen von $C_N \times D$. Bezeichnet B die Menge

$\{(f, d) \in C_N \times D : \Lambda(f, d) < x\}$ und p_1 die Projektion von $C_N \times D$ auf C_N , so gilt $B = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m$ und damit $\bar{A} = p_1[B] = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} p_1[B_m]$.

3. Zum Beweis der Meßbarkeit von A wird nun gezeigt, daß $p_1[B_m]$ abgeschlossen ist.

Da C_N metrisierbar ist, läßt sich die Abgeschlossenheit von $p_1[B_m]$ mittels Folgen nachweisen. Sei dazu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $p_1[B_m]$, die gegen $f \in C_N$ konvergiert. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $d_n \in D$ mit $(f_n, d_n) \in B_m$. Da D als kompakt vorausgesetzt war, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $d \in D$ konvergiert. Also konvergiert (f_n, d_n) gegen den Punkt (f, d) , der damit in der abgeschlossenen Menge B_m liegt. Es folgt, daß f in $p_1[B_m]$ liegt.

Bevor in drei Beispielen gezeigt wird, daß auf die in Satz 2 geforderten Voraussetzungen nicht verzichtet werden kann, zwei

Bemerkungen:

1. Indem man Λ_h durch $-\Lambda_h$ bzw. Λ_h^1 ersetzt, erhält man dem Satz 2 entsprechende Aussagen für $\Lambda := \lim_{h \rightarrow \infty} \Lambda_h$ (dabei geht "nach unten halbstetig" in "nach oben halbstetig" und " $\geq$ " in " $\leq$ " über) bzw. die analogen Limiten für $h \downarrow 0$. Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für Satz 1.

2. Im Zusammenhang mit dem Problem der Differenzierbarkeit der Pfade des zeitlich eindimensionalen Wiener'schen Prozesses

W^1 stößt Freedman in [6] auf die Frage, ob die Menge

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^1(t+h) - W^1(t)|}{h} = \infty \right\}$$

ein Ereignis darstellt. Daß diese Frage zu bejahen ist,

zeigt Satz 2 zusammen mit Bemerkung 1 angewandt auf

$$D := \{(t, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \alpha = 1\}, \quad \bigwedge_h(f, t, \alpha) := \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} \quad \text{und } x = \infty.$$

Die nun folgenden drei Beispiele zeigen, daß die Menge

$$C := \bigcap_{d \in D} \left\{ \omega : \lim_{h \rightarrow \infty} \bigwedge_h(W^N(\omega), d) \in B \right\}$$

im allgemeinen nicht mehr $\mathcal{A}$ -meßbar ist, falls in Satz 2 die Forderung " $D \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^N)$ "

durch " $D \in \mathcal{G}_0(\mathbb{R}_+^{II} \wedge \mathbb{R}^N)$ " bzw. " $\bigwedge_h$ nach unten halbstetig" durch

" $\bigwedge_h$ nach oben halbstetig" bzw. " $B = [x, \infty]$ " durch " $B = [-\infty, x]$ "

ersetzt wird. Wegen der Bemerkung 1 zu Theorem 1.1 genügt es,

dabei statt der $\mathcal{A}$ -Meßbarkeit der Menge C die $\mathcal{L}(C_N)$ -Meßbar-

keit der Menge $\bigcap_{d \in D} \{f \in C_N : \lim_{h \rightarrow \infty} \bigwedge_h(f, d) \in B\}$ zu untersuchen.

Beispiel 1.

Es sei D die Teilmenge $\{0\} \times \overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Bekanntlich ist jede

analytische Teilmenge von C_1 darstellbar als Projektion $p_1[F]$

einer abgeschlossenen Teilmenge F von $C_1 \times D$ auf $C_1^{(*)}$. Wählt man

F derart, daß $p_1[F]$ nicht $\mathcal{L}(C_1)$ -meßbar ist, so folgt mit den

nach unten halbstetigen Funktionen $\bigwedge_h := \chi_{\overline{F}^{(*)}}$, $0 < h < \infty$, von

(*) vgl. [10], §38, Abschnitt IV.

(**) χ_A ist die Indikator-Funktion zu A , die für $x \in A$ den Wert 1 und für $x \notin A$ den Wert 0 annimmt.

von $C_1 \times D$ in $\mathbb{R}$, daß $C := \bigcap_{d \in D} \{f \in C_1 : \lim_{h \rightarrow \infty} \Lambda_h(f, d) \geq 1\}$ nicht meßbar ist; denn es gilt $\bar{C} = p_1[F]$.

Beispiel 2.

Es sei $D := \{0\} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ und $C \subset C_1$ nicht $\mathcal{B}(C_1)$ -meßbar. Da C_1 ein separabler metrischer Raum ist, existiert eine injektive Abbildung φ von C_1 in $[0, 1]$. Mit Hilfe von C und φ läßt sich folgendermaßen eine Familie Λ_h , $0 < h < \infty$, nach oben halbstetiger Funktionen von $C_1 \times D$ in $\mathbb{R}$ konstruieren:

$$\Lambda_h := \begin{cases} \chi_{\{(g, 0)\}}, & \text{falls } g \in C \text{ und } h = \varphi(g) + n \text{ für ein geeignetes } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für sie gilt

$$\begin{aligned} \bigcap_{d \in D} \{f \in C_1 : \lim_{h \rightarrow \infty} \Lambda_h(f, d) \geq 1\} &= \{f \in C_1 : \sup_{0 < h \leq 1} \chi_{\{\varphi^{-1}(h) \cap C\}}(f) \geq 1\} \\ &= C \notin \mathcal{B}(C_1). \end{aligned}$$

Beispiel 3.

Es sei $D := \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ und $F \in \mathcal{F}(C_1 \times \{0\} \times \mathbb{Q})$ so gewählt, daß die Projektion $p_1[F]$ von F auf C_1 nicht $\mathcal{B}(C_1)$ -meßbar ist (vgl. Beispiel 1). Da $\mathcal{F}(C_1 \times \{0\} \times \mathbb{Q}) \subset \mathcal{G}_f(C_1 \times \{0\} \times \mathbb{Q})$ und $C_1 \times \{0\} \times \mathbb{Q}$ in $\mathcal{G}_f(C_1 \times D)$ liegt, läßt sich F als Durchschnitt einer absteigenden Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Teilmengen von $C_1 \times D$ darstellen. Wegen $F \neq C_1 \times D$ können alle G_n von $C_1 \times D$ verschieden angenommen werden.

Ist $\bar{d}$ eine mit der Topologie verträgliche Metrik auf $C_1 \times D$, und bezeichnet $\bar{d}((f, d), A)$ den Abstand eines Punktes (f, d) von

einer Teilmenge A, so wird durch

$$\Lambda_h(f, d) := \frac{1}{h - (n-1)} \overline{d}((f, d), \overline{G}_n) \wedge 1, \quad \text{falls } n-1 < h \leq n,$$

eine Familie $(\Lambda_h)_{0 < h < \infty}$ stetiger Abbildungen von $C_1 \times D$ in $\mathbb{R}$

definiert. Trotz dieser Stetigkeit ist die Menge

$C := \bigcap_{d \in D} \{f \in C_1 : \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \Lambda_h(f, d) \leq 0\}$ nicht $\mathcal{B}(C_1)$ -meßbar. Denn wegen

$$\sup_{n-1 < h \leq n} \Lambda_h = \chi_{G_n} \quad \text{und} \quad G_1 \supset G_2 \supset \dots \quad \text{gilt} \quad \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \Lambda_h = \inf_{n \in \mathbb{N}} \chi_{G_n} = \chi_F$$

und somit $\overline{C} = p_1[F]$.

Fordert man statt der $\mathcal{A}$ -Meßbarkeit der Menge (3.4) nur ihre

Meßbarkeit bezüglich der $\mathcal{G}$ -Algebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ der $\mathcal{A}$ -universell-meß-

baren Mengen, so lassen sich die Voraussetzungen an D, B und

Λ_h entscheidend abschwächen.

Satz 3.

Es sei $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^N)$, $\Lambda: C_N \times D \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{B}(C_N \times D)$ - $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbb{R}})$ -meßbare Abbildung und $B \in \mathcal{B}(\widetilde{\mathbb{R}})$. Dann gilt

$$(a) \quad \bigcap_{d \in D} \{\omega: \Lambda(\omega^N(\omega), d) \in B\} \in \widetilde{\mathcal{A}}.$$

Ist außerdem $D = D_1 \times D_2$ mit $D_1 \subset \mathbb{R}_+^N$ und $D_2 \subset \mathbb{R}^N$, so gilt

$$(b) \quad \bigcap_{\alpha \in D_2} \{(\omega, t): \Lambda(\omega^N(\omega), t, \alpha) \in B\} \in \widetilde{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^N).$$

Beweis zu (a): Ist A eine Borelsche Teilmenge eines polnischen

Raumes M_1 und g eine Borel-meßbare Abbildung von A in einen

polnischen Raum M_2 , so ist $g[A]$ eine analytische Teilmenge von

$M_2^{(*)}$. Angewandt auf $M_1 = C_N \times \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^N$, $A = \{(f, d) \in C_N \times D: \Lambda(f, d) \in B\}$,

$M_2 = C_N$ und die Projektion p_1 von A in M_2 erhält man, daß

(*) vgl. [17], Theorem 3.4.

$p_1[A] = \bigcup_{d \in D} \{f \in C_N: \bigwedge (f, d) \in \overline{B}\}$ analytisch ist und somit in $\widetilde{\mathcal{L}}(C_N)$ liegt. Als $\mathcal{O}$ - $\mathcal{L}(C_N)$ -meßbare Abbildung ist w^N auch $\widetilde{\mathcal{O}}$ - $\widetilde{\mathcal{L}}(C_N)$ -meßbar, woraus folgt, daß $\bigcup_{d \in D} \{\omega: \bigwedge (w^N(\omega), d) \in \overline{B}\}$ und damit auch $\bigcap_{d \in D} \{\omega: \bigwedge (w^N(\omega), d) \in B\}$ meßbar bezüglich $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist.

Beweis zu (b): In diesem Fall betrachte man statt der Projektion von A auf C_N die Projektion von A auf $C_N \times \mathbb{R}_+^N$. Berücksichtigt man außerdem die Gleichung $\mathcal{L}(C_N \times \mathbb{R}_+^N) = \mathcal{L}(C_N) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^N)$, so folgt die Behauptung wie im Fall (a).

Bemerkung:

Wendet man eine dem Satz 3(a) entsprechende Aussage auf $D: = \mathbb{R}^d$ und die für $s, u \in \mathbb{R}_+^{N-1}$ mit $s < u$ und $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\bigwedge := \chi_A, \quad A := \bigcup_{m \geq n} \{(f, x) \in C_N^d \times D: \inf_{\substack{s \leq t \leq u \\ n \leq t_N \leq m}} |f(t, t_N) - x| = 0\}$$

definierte meßbare Abbildung $\bigwedge$ von $C_N^d \times D$ in $\mathbb{R}$ an, so folgt

$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}^d} \bigcup_{\substack{s \leq t \leq u \\ n \leq t_N}} \{\omega: w^{N,d}(\omega; t, t_N) = x\} = \bigcap_{x \in D} \{\omega: \bigwedge(w^{N,d}(\omega), x) = 1\} \in \widetilde{\mathcal{O}}$$

und damit die $\widetilde{\mathcal{O}}$ -Meßbarkeit der in Theorem 2.2 betrachteten Menge.

Korollar.

Satz 3 ist insbesondere auf $\bigwedge := \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \bigwedge_h$ bzw. $\bigwedge := \underline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \bigwedge_h$

mit nach unten bzw. nach oben halbstetigen $\bigwedge_h: C_N \times D \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$,

$0 < h < \infty$, anwendbar.

Beweis: vgl. Beweis zu Satz 1.

Bevor die Sätze 1 und 3 durch zwei für die Anwendungen wichtige Beispiele erläutert werden, ist eine Definition notwendig.

Interessiert man sich für das Verhalten einer Funktion $f \in C_N$ bei Annäherung an einen Punkt $t \in \mathbb{R}_+^N$ aus einer Richtung $-\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}^N - \{0\}$), so muß $f(t+\alpha h)$ für hinreichend kleine positive Zahlen h definiert sein; d.h., für hinreichend kleine $h > 0$ muß gelten $t+\alpha h \geq 0$. Dabei kann man sich auf solche t und α mit $t \cdot \alpha > 0$ beschränken; denn andernfalls ist $f(t+\alpha h) = 0$ für hinreichend kleine $h > 0$. Entsprechendes gilt auch beim Studium von $f(t+\alpha h)$ für $h \rightarrow \infty$.

Es ist daher zweckmäßig, die folgenden zwei Bezeichnungen einzuführen:

Definition 1.

$$R_0 := \{(t, \alpha) : t \in \mathbb{R}_+^N \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}^N - \{0\} \text{ mit } t \cdot \alpha > 0\},$$

$$R_\infty := \{(t, \alpha) : t \in \mathbb{R}_+^N \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}_+^N - \{0\} \text{ mit } t \cdot \alpha > 0\}.$$

Bemerkungen:

1. Auf eine Indizierung von R_0 bzw. R_∞ durch N wird verzichtet, da aus dem Zusammenhang stets zweifelsfrei hervorgeht, um welche Dimension es sich handelt.
2. Sowohl R_0 als auch R_∞ liegt in $\mathfrak{F}_s(\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^N)$.

Beispiel zu Satz 1.

Ist $(\underline{t}, \underline{\alpha}) \in R_\infty$, $\emptyset \neq D \subset R_\infty$, γ_h für $0 < h < \infty$ eine beliebige Abbildung von D in $\mathbb{R} - \{0\}$ und $B \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{R}})$, so gilt

$$\{ \varlimsup_{h \rightarrow \infty} \sup_{(t, \alpha) \in D} \frac{|w^N(t+\alpha h) - w^N(t+\beta h)|}{\psi_h(t, \alpha)} \in B \} \in \mathcal{O}.$$

Dies folgt aus Satz 1 angewandt auf die Abbildungen

$\Lambda_h: f \mapsto \sup_{(t, \alpha) \in D} \frac{|f(t+\alpha h) - f(t+\beta h)|}{\psi_h(t, \alpha)}$, die als Supremum der stetigen Abbildungen $f \mapsto \frac{|f(t+\alpha h) - f(t+\beta h)|}{\psi_h(t, \alpha)}$, $(t, \alpha) \in D$, nach unten halbstetig sind.

Beispiel zu Satz 3.

Ist $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_0)$, $B \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{R}})$ und $\psi_h: D \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ für $0 < h < \infty$ stetig, so sind die Mengen

$$\bigcap_{(t, \alpha) \in D} \{ \varlimsup_{h \rightarrow \infty} \frac{w^N(t+\alpha h) - w^N(t)}{\psi_h(t, \alpha)} \in B \},$$

$$\bigcap_{(t, \alpha) \in D} \{ \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{w^N(t+\alpha h) - w^N(t)}{\psi_h(t, \alpha)} \in B \} \text{ und}$$

$$\bigcap_{(t, \alpha) \in D} \{ \varlimsup_{h \rightarrow \infty} \frac{|w^N(t+\alpha h) - w^N(t)|}{\psi_h(t, \alpha)} \in B \} \text{ meßbar bezüglich } \tilde{\mathcal{O}}.$$

Diese Aussage folgt aus dem Korollar zu Satz 3, da die durch

$$\Lambda_h(f, t, \alpha) := \frac{f(t+\alpha h) - f(t)}{\psi_h(t, \alpha)} \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_h(f, t, \alpha) := \frac{|f(t+\alpha h) - f(t)|}{\psi_h(t, \alpha)}$$

definierten Abbildungen von $C_N \times D$ in $\tilde{\mathbb{R}}$ stetig sind (damit

$\Lambda_h(f, t, \alpha)$ für alle $f \in C_N$, $(t, \alpha) \in D$ und $h \in]0, \infty[$ definiert

ist, setze man f von $\mathbb{R}_+^N$ stetig durch $f(t) = 0$ für $t \notin \mathbb{R}_+^N$ fort).

Meßbarkeitsfragen werden im folgenden nur dann erörtert, wenn sie wesentlich von den in den obigen Beispielen behandelten Fällen abweichen.

3.2. Das asymptotische Verhalten für $h \rightarrow \infty$

Für $(t, \alpha) \in \mathbb{R}_+$ ist die Abbildung $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^N$, definiert durch $f(h) := t + \alpha h$, stetig und monoton wachsend. Nach Satz 1.5 besitzen die Prozesse $(W^N(t + \alpha h) - W^N(t))_{h \in \mathbb{R}_+}$ und $(W^1(\psi(t, \alpha, h)))_{h \in \mathbb{R}_+}$, wobei $\psi(t, \alpha, h) := \sum_{i=1}^N (t_i + \alpha_i h) - \sum_{i=1}^N t_i$, als Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{J}_1$ also dieselbe Verteilung. Wegen $\lim_{h \rightarrow \infty} \psi(t, \alpha, h) = \infty$ kann man daher das für W^1 gültige Gesetz vom iterierten Logarithmus übertragen zu

$$(3.5) \quad \mathbb{P} \left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(t + \alpha h) - W^N(t)}{(2\psi(t, \alpha, h) \log(\log \psi(t, \alpha, h)))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right) = 1.$$

Berücksichtigt man, daß $h^{\frac{1}{2}} \leq \psi(t, \alpha, h) \leq h^{N+1}$ für hinreichend große h und damit $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\log \log h}{\log(\log \psi(t, \alpha, h))} = 1$ gilt und daß $W^N(t)$ endlich ist, so läßt sich (3.5) auch folgendermaßen schreiben:

$$(3.6) \quad \mathbb{P} \left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(t + \alpha h)}{(2\psi(t, \alpha, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right) = 1.$$

Dabei bleibt freigestellt, das Polynom $h \mapsto \psi(t, \alpha, h)$ durch jede andere Funktion $h \mapsto \varphi(t, \alpha, h)$ mit $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\psi(t, \alpha, h)}{\varphi(t, \alpha, h)} = 1$ zu ersetzen. Eine dieser Funktionen, nämlich das Glied mit der höchsten Potenz des Polynoms $h \mapsto \psi(t, \alpha, h)$, ist durch ihre einfache Gestalt ausgezeichnet. Sie wird zusammen mit einigen Abkürzungen eingeführt in

Definition 2.

$$(a) \quad d(s, t) := \prod_{i=1}^N t_i - \prod_{i=1}^N s_i \quad \text{für } 0 \leq s \leq t,$$

$$d(t) := d(0, t) \quad \text{für } 0 \leq t.$$

$$\left. \begin{aligned} (b) \quad N_0(\alpha) &:= \{i: \alpha_i = 0\} \\ N_+(\alpha) &:= \{i: \alpha_i > 0\} \\ N_-(\alpha) &:= \{i: \alpha_i < 0\} \end{aligned} \right\} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}^N.$$

$$(c) \quad \varphi_\infty(t, \alpha, h) := \prod_{i \in N_+(\alpha)} t_i \cdot \prod_{i \in N_-(\alpha)} (\alpha_i h) \quad \text{für } (t, \alpha) \in \mathbb{R}_\infty \text{ und } h > 0.$$

Bemerkung:

Ausmultiplizieren von $d(t+\alpha h)$ zeigt, daß für $(t, \alpha) \in \mathbb{R}_\infty$ gilt:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{d(t, t+\alpha h)}{\varphi_\infty(t, \alpha, h)} = 1 = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{d(t+\alpha h)}{\varphi_\infty(t, \alpha, h)}.$$

Das eingangs hergeleitete Ergebnis (3.6) wird nun in der durch obige Bemerkung ermöglichten Fassung festgehalten in

Satz 4.

$$\text{Für } (t, \alpha) \in \mathbb{R}_\infty \text{ gilt } \mathbb{P}\left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(t+\alpha h)}{(2 \varphi_\infty(t, \alpha, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}}\right) = 1) = 1.$$

Bemerkung:

Benutzt man die Symmetrie von W^N , so folgt aus Satz 4

$$\mathbb{P}\left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(t+\alpha h)}{(2 \varphi_\infty(t, \alpha, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = -1\right) = 1 \quad \text{für } (t, \alpha) \in \mathbb{R}_\infty.$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben

$$\mathbb{P}\left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{|W^N(t+\alpha h)|}{(2 \varphi_\infty(t, \alpha, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = 1\right) = 1 \quad \text{für } (t, \alpha) \in \mathbb{R}_\infty.$$

Auf diese "Verdreifachung des Ergebnisses", die noch an verschiedenen weiteren Stellen möglich ist, wird im folgenden nicht mehr ausdrücklich hingewiesen.

Um Satz 4 zu der am Anfang des Paragraphen angekündigten Aussage (3.3) zu erweitern, ist ein Hilfssatz nötig.

Lemma 1.

Für $(\underline{t}, \underline{\alpha}), (\bar{t}, \bar{\alpha}) \in R_{\infty}$ mit $(\underline{t}, \underline{\alpha}) \leq (\bar{t}, \bar{\alpha})$ und $N_+(\underline{\alpha}) = N_+(\bar{\alpha})$ gilt

$$\mathbb{P}(\lim_{h \rightarrow \infty} \max_{\substack{\underline{t} \leq t \leq \bar{t} \\ \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}}} \frac{|W^N(t+\alpha h) - W^N(\underline{t}+\underline{\alpha}h)|}{(2 \varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} \leq 2(\frac{\varphi_{\infty}(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{\varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} - 1)^{\frac{1}{2}}) = 1.$$

Beweis: Ist $c > 2(\frac{\varphi_{\infty}(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{\varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} - 1)^{\frac{1}{2}}$, $q > 1$ und $m \in \mathbb{N}$ so groß, daß $q^m > e$,

so gilt für $n > m$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} a_n &:= \\ \mathbb{P}(\max\{ \frac{|W^N(t+\alpha h) - W^N(\underline{t}+\underline{\alpha}h)|}{(2 \varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} : (\underline{t}, \underline{\alpha}, q^{n-1}) \leq (t, \alpha, h) \leq (\bar{t}, \bar{\alpha}, q^n) \} > c) \\ &\leq \mathbb{P}(\max\{ |W^N(t+\alpha h) - W^N(\underline{t}+\underline{\alpha}h)| : (\underline{t}, \underline{\alpha}, q^{n-1}) \leq (t, \alpha, h) \leq (\bar{t}, \bar{\alpha}, q^n) \} \\ &\quad \geq c(2 \varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, q^{n-1}) \log(\log q^{n-1}))^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq 2 \mathbb{P}(\max\{ |W^N(t+\alpha h) - W^N(\underline{t}+\underline{\alpha}q^{n-1})| : (\underline{t}, \underline{\alpha}, q^{n-1}) \leq (t, \alpha, h) \leq (\bar{t}, \bar{\alpha}, q^n) \} \\ &\quad \geq \frac{c}{2}(2 \varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, q^{n-1}) \log(\log q^{n-1}))^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Diese Ungleichungskette läßt sich mit Hilfe von Satz 1.8 und

der für $x > 0$ gültigen Abschätzung $\mathbb{P}(|W^N(<1>)| \geq x) \leq (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

folgendermaßen weiterführen:

$$\begin{aligned} &\leq 2^{N+1} \mathbb{P}(|W^N(\bar{t}+\bar{\alpha}q^n) - W^N(\underline{t}+\underline{\alpha}q^{n-1})| \geq \frac{c}{2}(2 \varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, q^{n-1}) \log(\log q^{n-1}))^{\frac{1}{2}}) \\ &= 2^{N+1} \mathbb{P}(|W^N(<1>)| \geq (2c_n \log(\log q^{n-1}))^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq \frac{2^{N+1}}{(\pi c_n \log(\log q^{n-1}))^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{(n-1) \log q} \right)^{c_n}, \end{aligned}$$

wobei $c_n := \frac{c^2}{4} \cdot \frac{\varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, q^{n-1})}{\delta(\bar{t}+\bar{\alpha}q^n) - \delta(\underline{t}+\underline{\alpha}q^{n-1})}$. Wegen der Bemerkung zu

Definition 2 und wegen $N_+(\underline{\alpha}) = N_+(\bar{\alpha})$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(\bar{t}+\bar{\alpha}q^n)}{\varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, q^{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{\infty}(\bar{t}, \bar{\alpha}, q^n)}{\varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, q^{n-1})} = \frac{\varphi_{\infty}(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{\varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} \cdot q^{N_+(\bar{\alpha})}$$

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\underline{t} + \underline{\alpha} q^{n-1})}{f_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, q^{n-1})} = 1.$$

$$\text{Es folgt, da\ss } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{c}{4} \cdot \left(\frac{f_{\infty}(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{f_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} \cdot q^{N_+(\bar{\alpha})} - 1 \right)^{-1} > 1 \text{ f\"ur}$$

ein geeignetes $q > 1$. F\"ur das so gew\"ahlte q konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \geq m}^{\infty} a_n \text{ und damit gilt}$$

$$\mathbb{P} \left(\lim_{h \rightarrow \infty} \max_{\substack{\underline{t} \leq t \leq \bar{t} \\ \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}}} \frac{|W^N(t + \alpha h) - W^N(\underline{t} + \underline{\alpha} h)|}{(2 \varphi_{\infty}(t, \alpha, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} \leq c \right) = 1.$$

Hieraus folgt die Behauptung, wenn man c von oben gegen

$$2 \left(\frac{f_{\infty}(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{f_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ streben l\"asst.}$$

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts beinhaltet

Theorem 1.

$$\widetilde{\mathbb{P}} \left(\bigcap_{(t, \alpha) \in R_{\infty}} \left\{ \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(t + \alpha h)}{(2 \varphi_{\infty}(t, \alpha, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} \right) = 1.$$

Beweis: Nach Satz 4 und Lemma 1 besitzen die f\"ur $(\underline{t}, \underline{\alpha}), (\bar{t}, \bar{\alpha}) \in R_{\infty}$

mit $(\underline{t}, \underline{\alpha}) \leq (\bar{t}, \bar{\alpha})$ und $N_+(\underline{\alpha}) = N_+(\bar{\alpha})$ durch

$$A(\underline{t}, \underline{\alpha}) := \left\{ \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(\underline{t} + \underline{\alpha} h)}{(2 \varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\},$$

$$B(\underline{t}, \underline{\alpha}) := \left\{ \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{|W^N(\underline{t} + \underline{\alpha} h)|}{(2 \varphi_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} \text{ und}$$

$$C(\underline{t}, \underline{\alpha}; \bar{t}, \bar{\alpha}) := \left\{ \lim_{h \rightarrow \infty} \max_{\substack{\underline{t} \leq t \leq \bar{t} \\ \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}}} \frac{|W^N(t + \alpha h) - W^N(\underline{t} + \underline{\alpha} h)|}{(2 \varphi_{\infty}(t, \alpha, h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} \leq 2 \left(\frac{f_{\infty}(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{f_{\infty}(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

definierten Ereignisse alle die Wahrscheinlichkeit 1. Es gen\"ugt

daher, f\"ur

$$A := \bigcap_{(\underline{t}, \underline{\alpha}) \in R_{\infty} \cap \mathbb{Q}^{2N}} (A(\underline{t}, \underline{\alpha}) \cap B(\underline{t}, \underline{\alpha}) \cap \bigcap \{ C(\underline{t}, \underline{\alpha}; \bar{t}, \bar{\alpha}) : (\underline{t}, \underline{\alpha}) \leq (\bar{t}, \bar{\alpha}) \in \mathbb{Q}^{2N} \\ \text{mit } N_+(\underline{\alpha}) = N_+(\bar{\alpha}) \})$$

die Inklusion $A \subset \bigcap_{(t,\alpha) \in R_\infty} A(t,\alpha)$ nachzuweisen.

Sei dazu $\omega \in A$ und $(t,\alpha) \in R_\infty$. Für $(\underline{t},\underline{\alpha}), (\overline{t},\overline{\alpha}) \in R_\infty \cap \mathbb{Q}^{2N}$ mit

$(\underline{t},\underline{\alpha}) \leq (t,\alpha) \leq (\overline{t},\overline{\alpha})$ und $N_+(\underline{\alpha}) = N_+(\overline{\alpha})$ gilt dann

$$\begin{aligned} & \left| \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(\omega; t+\alpha h)}{(2 \varphi_\alpha(t,\alpha,h) \log(\log h))^{\frac{1}{4}}} - 1 \right| \\ &= \left| \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(\omega; t+\alpha h)}{(2 \varphi_\alpha(t,\alpha,h) \log(\log h))^{\frac{1}{4}}} - \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(\omega; \underline{t}+\underline{\alpha}h)}{(2 \varphi_\alpha(\underline{t},\underline{\alpha},h) \log(\log h))^{\frac{1}{4}}} \right| \\ &\leq \left| \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(\omega; \underline{t}+\underline{\alpha}h)}{(2 \varphi_\alpha(t,\alpha,h) \log(\log h))^{\frac{1}{4}}} - \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(\omega; \underline{t}+\underline{\alpha}h)}{(2 \varphi_\alpha(\underline{t},\underline{\alpha},h) \log(\log h))^{\frac{1}{4}}} \right| \\ &\quad + \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \frac{|W^N(\omega; t+\alpha h) - W^N(\omega; \underline{t}+\underline{\alpha}h)|}{(2 \varphi_\alpha(t,\alpha,h) \log(\log h))^{\frac{1}{4}}} \\ &\leq \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{\varphi_\alpha(\underline{t},\underline{\alpha},h)^{\frac{1}{4}}}{\varphi_\alpha(t,\alpha,h)^{\frac{1}{4}}} \right) \frac{|W^N(\omega; \underline{t}+\underline{\alpha}h)|}{(2 \varphi_\alpha(t,\alpha,h) \log(\log h))^{\frac{1}{4}}} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{\varphi_\alpha(\overline{t},\overline{\alpha},1)}{\varphi_\alpha(\underline{t},\underline{\alpha},1)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{\varphi_\alpha(\underline{t},\underline{\alpha},1)^{\frac{1}{4}}}{\varphi_\alpha(t,\alpha,1)^{\frac{1}{4}}} + 2 \left(\frac{\varphi_\alpha(\overline{t},\overline{\alpha},1)}{\varphi_\alpha(\underline{t},\underline{\alpha},1)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Konvergieren $(\underline{t},\underline{\alpha})$ und $(\overline{t},\overline{\alpha})$ gegen (t,α) , so strebt diese Zahl

gegen 0. Also gilt $\overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(\omega; t+\alpha h)}{(2 \varphi_\alpha(t,\alpha,h) \log(\log h))^{\frac{1}{4}}} = 1$, d.h.

$\omega \in A(t,\alpha)$.

Bemerkungen:

1. Offenbar bleibt die Aussage von Theorem 1 unverändert, wenn man den Durchschnitt statt über alle $(t,\alpha) \in R_\infty$ nur über die $(t,\alpha) \in R_\infty$ mit $|\alpha|=1$ erstreckt. Die vorliegende Fassung wurde aus beweistechnischen Gründen gewählt.

2. Aus Theorem 1 folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{t_1=0 \\ t_2, \dots, t_N > 0}} \left\{ \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(t+e(1)h)}{(2 \varphi_{\infty}(t, e(1), h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} \right) = 1$$

oder anders geschrieben

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{t_2, \dots, t_N > 0} \left\{ \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{W^N(t)}{(2 \prod_{1 \leq i \leq N} t_i \log(\log t_1))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} \right) = 1.$$

Für den Fall $N=2$ zeigte diese Gleichung bereits Zimmerman ([20]), und zwar mit Hilfe des eingangs angeführten Ergebnisses (3.2) und der Gleichung

$$(3.7) \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{t_2 > 0} \left\{ \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{W^2(t_1, t_2)}{(2t_1 t_2 \log(\log t_1))^{\frac{1}{2}}} \geq 1 \right\} \right) = 1.$$

Zum Nachweis von (3.2) benutzte er eine Verallgemeinerung des Beweises der einfachen Hälfte

$$\mathbb{P}\left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^1(h)}{(2h \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} \leq 1\right) = 1,$$

zum Nachweis von (3.7) eine Verallgemeinerung des Beweises der tieferliegenden Hälfte

$$\mathbb{P}\left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^1(h)}{(2h \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} \geq 1\right) = 1$$

des Gesetzes vom iterierten Logarithmus.

3.3. Das asymptotische Verhalten für $h \downarrow 0$

Im Gesetz vom iterierten Logarithmus kann $W^1(h)$ ersetzt werden durch $hW^1(\frac{1}{h})$, denn die Prozesse $(W^1(h))_{h>0}$ und $(hW^1(\frac{1}{h}))_{h>0}$ besitzen als Zufallsvariablen mit Werten in $C_0[0, \infty[$ dieselbe Verteilung. Man erhält dann folgende Aussage über das asymp-

tische Verhalten von W^1 bei Annäherung an 0:

$$(3.8) \quad \mathbb{P} \left(\lim_{h \downarrow 0} \frac{W^1(h)}{(2h \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right) = 1.$$

Dieses Vorgehen bietet sich auch bei zeitlich mehrdimensionalen Wiener'schen Prozessen an. Wegen Satz 1.3 kann nämlich in der aus Theorem 1 folgenden Gleichung

$$\tilde{\mathbb{P}} \left(\bigcap_{\alpha > 0} \left\{ \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{W^N(\alpha h)}{(2 \prod_{1 \leq i \leq N} (\alpha_i h) \log(\log h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} \right) = 1$$

$W^N(\alpha h)$ durch $\prod_{1 \leq i \leq N} (\alpha_i h) W^N(\frac{1}{\alpha_1 h}, \dots, \frac{1}{\alpha_N h})$ ersetzt werden. Übergang von h zu $\frac{1}{h}$ und von α zu $(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_N})$ liefert dann

$$(3.9) \quad \tilde{\mathbb{P}} \left(\bigcap_{\alpha > 0} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{W^N(\alpha h)}{(2 \prod_{1 \leq i \leq N} (\alpha_i h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} \right) = 1.$$

Ein erstes Ziel dieses Abschnitts ist es, obige Gleichung zu verallgemeinern zu

$$(3.10) \quad \tilde{\mathbb{P}} \left(\bigcap_{\substack{\alpha \geq 0: \\ (t, \alpha) \in R_0}} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{W^N(t + \alpha h) - W^N(t)}{(2 (\prod_{1 \leq i \leq N} (t_i + \alpha_i h) - \prod_{1 \leq i \leq N} t_i) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} \right) \\ = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+^N.$$

Während diese Aussage im Fall $N=1$ unmittelbar aus (3.8) und der Markov-Eigenschaft folgt, ist im zeitlich mehrdimensionalen Fall ein Zurückführen auf (3.9) nicht möglich. Es ist daher nötig, auf die Beweismethoden zu Theorem 1 zurückzugreifen.

Dazu wird zunächst eine der Hilfsfunktion φ_∞ entsprechende Funktion φ_0 eingeführt.

Definition 3.

Für $(t, \alpha) \in R_0$ und $h > 0$ sei

$$\varphi_0(t, \alpha, h) := \begin{cases} \sum_{k=1}^N \left(\prod_{i \neq k} t_i \right) \cdot |\alpha_k| \cdot h, & \text{falls } N_0(t) = \emptyset; \\ \prod_{i \notin N_0(t)} t_i \cdot \prod_{i \in N_0(t)} (|\alpha_i| \cdot h), & \text{falls } N_0(t) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned} \text{Aus } \delta(t, t+\alpha h) &= \sum_{\emptyset \neq S \subset \{1, \dots, N\}} \prod_{i \notin S} t_i \cdot \prod_{i \in S} (\alpha_i h) \\ &= \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset \{1, \dots, N\} \\ N_0(t) \subset S}} \prod_{i \notin S} t_i \cdot \prod_{i \in S} (\alpha_i h) \end{aligned}$$

folgt, daß $\varphi_0(t, \alpha, h)$ für $(t, \alpha) \in R_0$ mit $\alpha \geq 0$ das Glied des Polynoms $h \mapsto \delta(t, t+\alpha h)$ mit der niedrigsten Potenz ist. Daher gilt

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\delta(t, t+\alpha h)}{\varphi_0(t, \alpha, h)} = 1.$$

Mit Hilfe der Funktion φ_0 läßt sich das asymptotische Verhalten von w^N bei Annäherung an einen endlichen Punkt t auf einem fest vorgegebenem Strahl $(t+\alpha h)_{h>0}$ mit $(t, \alpha) \in R_0$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $\alpha \geq 0$ folgendermaßen beschreiben:

Satz 5.

$$\mathbb{P} \left(\lim_{h \downarrow 0} \frac{w^N(t+\alpha h) - w^N(t)}{(2 \varphi_0(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right) = 1 \quad \text{für } (t, \alpha) \in R_0 \text{ mit } \alpha \geq 0.$$

Beweis: Es genügt wegen obiger Bemerkung und wegen

$$h^{N+1} \leq \delta(t, t+\alpha h) \leq h^{\frac{1}{2}} \quad \text{für hinreichend kleine } h > 0, \text{ die Gleichung}$$

$$\mathbb{P} \left(\lim_{h \downarrow 0} \frac{w^N(t+\alpha h) - w^N(t)}{(2 \delta(t, t+\alpha h) \log(\log 1/\delta(t, t+\alpha h)))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right) = 1$$

nachzuweisen. Da die Prozesse $(w^N(t+\alpha h) - w^N(t))_{h \geq 0}$ und

$(W^1(\delta(t, t+\alpha h)))_{h \geq 0}$ als Zufallsvariablen mit Werten in C_1 dieselbe Verteilung besitzen, folgt diese Gleichung unmittelbar aus (3.8).

Der nächste Hilfssatz spielt beim Beweis von (3.10) die gleiche Rolle wie Lemma 1 beim Beweis von Theorem 1.

Lemma 2.

Es seien $(\underline{t}, \underline{\alpha}), (\bar{t}, \bar{\alpha}) \in R_0$ mit $0 \leq (\underline{t}, \underline{\alpha}) \leq (\bar{t}, \bar{\alpha})$ gegeben.

Ist $\underline{t} = \bar{t}$ oder $N_0(\underline{t}) = N_0(\bar{t}) \neq \emptyset$, so gilt

$$\mathbb{P}(\lim_{h \downarrow 0} \max_{\substack{\underline{t} \leq t \leq \bar{t} \\ \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}}} \frac{|W^N(t+\alpha h) - W^N(\underline{t}+\underline{\alpha}h)|}{(2\varphi_0(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} \leq 2(\frac{\varphi_0(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{\varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} - 1)^{\frac{1}{2}}) = 1.$$

Beweis: Wie im Beweis zu Lemma 1 zeigt man für

$c > 2(\frac{\varphi_0(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{\varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} - 1)^{\frac{1}{2}}$, $0 < q < 1$ und genügend große $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\max\{\frac{|W^N(t+\alpha h) - W^N(\underline{t}+\underline{\alpha}h)|}{(2\varphi_0(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} : (\underline{t}, \underline{\alpha}, q^n) \leq (t, \alpha, h) \leq (\bar{t}, \bar{\alpha}, q^{n-1})\} > c) \\ & \leq 2^{N+1} \mathbb{P}(|W^N(<1>)| \geq (2c_n \log(\log \frac{1}{q^{n-1}}))^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

$$\text{wobei } c_n := \frac{c^2}{4} \cdot \frac{\varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, q^n)}{\delta(\bar{t} + \bar{\alpha} q^{n-1}) - \delta(\underline{t} + \underline{\alpha} q^n)}.$$

Es genügt nun nachzuweisen, daß unter den geforderten Voraussetzungen zu c ein $q \in]0, 1[$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n > 1$ existiert (vgl. Beweis zu Lemma 1).

Für $\underline{t} = \bar{t}$ oder $N_0(\underline{t}) = N_0(\bar{t}) \neq \emptyset$ gilt

$$\delta(\bar{t} + \bar{\alpha} q^{n-1}) - \delta(\underline{t} + \underline{\alpha} q^n) = \delta(\bar{t}, \bar{t} + \bar{\alpha} q^{n-1}) - \delta(\underline{t}, \underline{t} + \underline{\alpha} q^n)$$

und daher unter Verwendung der Bemerkung zu Definition 3

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(\bar{t} + \underline{\alpha} q^{n-1}) - \delta(\underline{t} + \underline{\alpha} q^n)}{\varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, q^n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_0(\bar{t}, \bar{\alpha}, q^{n-1})}{\varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, q^n)} - 1 \\ &= \frac{\varphi_0(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{\varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} \cdot \frac{1}{q} - 1, \text{ falls } N_0(\underline{t}) = \emptyset, \\ \text{bzw. } &= \frac{\varphi_0(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{\varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} \left(\frac{1}{q}\right)^{|N_0(\underline{t})|} - 1, \text{ falls } N_0(\underline{t}) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

In beiden Fällen folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n > 1$ für eine hinreichend nahe bei 1 gelegene Zahl $q \in]0, 1[$.

Mit Hilfe von Lemma 2 läßt sich nun aus Satz 5 neben (3.10) eine weitere Aussage ableiten. Diese besagt, daß $W^N(\omega)$ für $\mathbb{P}$ -fast alle $\omega \in \Omega$ auf allen Strahlen $(t + \alpha h)_{h \geq 0}$, deren Richtung α in R_+^N und deren Endpunkt t in dR_+^N liegt, gleichzeitig das in Satz 5 beschriebene Verhalten zeigt.

Satz 6.

Ist $D_1 := \{(t, \alpha) \in R_0 : t = s \text{ und } \alpha \geq 0\}$ mit $s \in R_+^N$ und

$D_2 := \{(t, \alpha) \in R_0 : t \in dR_+^N \text{ und } \alpha \geq 0\}$, so gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{(t, \alpha) \in D_i} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{W^N(t + \alpha h) - W^N(t)}{(2 \varphi_0(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} \right) = 1 \quad \text{für } i=1, 2.$$

Beweis: Für $(\underline{t}, \underline{\alpha}), (\bar{t}, \bar{\alpha}) \in R_0$ mit $0 \leq (\underline{t}, \underline{\alpha}) \leq (\bar{t}, \bar{\alpha})$ sei

$$A(\underline{t}, \underline{\alpha}) := \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{W^N(\underline{t} + \underline{\alpha} h) - W^N(\underline{t})}{(2 \varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\},$$

$$B(\underline{t}, \underline{\alpha}) := \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^N(\underline{t} + \underline{\alpha} h) - W^N(\underline{t})|}{(2 \varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} C(\underline{t}, \underline{\alpha}; \bar{t}, \bar{\alpha}) &:= \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \max_{\substack{\underline{t} \leq t \leq \bar{t} \\ \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}}} \frac{|W^N(t + \alpha h) - W^N(t) - (W^N(\underline{t} + \underline{\alpha} h) - W^N(\underline{t}))|}{(2 \varphi_0(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. \leq 2 \left(\frac{\varphi_0(\bar{t}, \bar{\alpha}, 1)}{\varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Dann gelten die Inklusionen

$$\bigcap_{\substack{0 \leq \underline{\alpha} \in \mathbb{Q}^N \\ (s, \underline{\alpha}) \in R_0}} (A(s, \underline{\alpha}) \cap B(s, \underline{\alpha}) \cap \bigcap_{\substack{\underline{\alpha} \leq \bar{\alpha} \in \mathbb{Q}^N \\ C(s, \underline{\alpha}; s, \bar{\alpha})}) = \bigcap_{(t, \alpha) \in D_1} A(t, \alpha)$$

und

$$\begin{aligned} \bigcap_{(t, \alpha) \in D_2 \cap \mathbb{Q}^{2N}} (A(t, \alpha) \cap B(t, \alpha) \cap \bigcap_{\substack{C(t, \alpha; \bar{t}, \bar{\alpha}) : (t, \alpha) \leq (\bar{t}, \bar{\alpha}) \in \mathbb{Q}^{2N}, \\ N_0(t) = N_0(\bar{t}) + \emptyset}}) \\ = \bigcap_{(t, \alpha) \in D_2} A(t, \alpha), \end{aligned}$$

die man wie die entsprechende Aussage im Beweis zu Theorem 1 zeigt. Da nach Satz 5 die Ereignisse $A(\underline{t}, \underline{\alpha})$ und $B(\underline{t}, \underline{\alpha})$ und nach Lemma 2 die Ereignisse $C(s, \underline{\alpha}; s, \bar{\alpha})$ und $C(\underline{t}, \underline{\alpha}; \bar{t}, \bar{\alpha})$ für $N_0(\underline{t}) = N_0(\bar{t}) + \emptyset$ alle die Wahrscheinlichkeit 1 besitzen, folgt aus den beiden Inklusionen die Behauptung. |

Im zweiten Teil dieses Abschnitts soll nun gezeigt werden, daß Satz 6 auch ohne die Einschränkung $\alpha \geq 0$ richtig bleibt. Dazu dient der nächste Satz. Er wird zwecks Anwendung im nächsten Paragraphen allgemeiner formuliert, als es an dieser Stelle notwendig ist.

Zuvor sind noch einige Bezeichnungen einzuführen.

Definition 4.

Für $S \subset \{1, \dots, N\}$ definiere man:

(a) $R_S := \{(t, \alpha) \in R_0 : N_0(t) = S\}.$

(b) $\pi_S^1 : \{t \in \mathbb{R}_+^N : N_0(t) \cap S = \emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}_+^N$ mit $(\pi_S^1(t))_i := \begin{cases} 1 & \text{für } i \in S, \\ t_i & \text{für } i \notin S. \end{cases}$

$$(c) \pi_S^2: \bigcup_{T: S \cap T = \emptyset} R_T \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ mit } (\pi_S^2(t, \alpha))_i := \begin{cases} -\frac{\alpha_i}{t_i^2} & \text{für } i \in S, \\ \alpha_i & \text{für } i \notin S. \end{cases}$$

$$(d) \pi_S: \bigcup_{T: S \cap T = \emptyset} R_T \longrightarrow \bigcup_{T: S \cap T = \emptyset} R_T \text{ mit}$$

$$\pi_S(t, \alpha) := (\pi_S^1(t), \pi_S^2(t, \alpha)).$$

Satz 7.

Es seien S und T disjunkte Teilmengen von $\{1, \dots, N\}$ und

$$g:]0, \frac{1}{e}[\longrightarrow]0, \infty[\text{ mit } \lim_{h \downarrow 0} \frac{g(h) \varphi_\alpha(t, \alpha, h)}{h^{2+|T|} \log 1/h} = \infty \text{ für alle } (t, \alpha) \in R_T.$$

Dann gilt für $D \in \mathcal{L}(R_T)$ und $B \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{R}})$

$$(a) \tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcap_{(t, \alpha) \in D} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{W^N(t + \alpha h) - W^N(t)}{(g(h) \varphi_\alpha(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} \in B \right\}\right) \\ = \tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcap_{(t, \alpha) \in \pi_S^{-1}[D]} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{W^N(t + \alpha h) - W^N(t)}{(g(h) \varphi_\alpha(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} \in B \right\}\right).$$

(b) Gleichung (a) bleibt richtig, wenn man $W^N(t + \alpha h) - W^N(t)$ durch

$$|W^N(t + \alpha h) - W^N(t)| \text{ ersetzt.}$$

Beweis: Die $\tilde{\mathcal{O}}$ -Meßbarkeit der in der Behauptung und im folgenden auftretenden Mengen ergibt sich aus Satz 3, da π_S eingeschränkt auf R_T involutorisch und stetig ist, und somit

$$\pi_S[D] = \pi_S^{-1}[D] \text{ in } \mathcal{L}(R_T) \text{ liegt.}$$

Die Beweise zu (a) und (b) verlaufen völlig analog. Es wird deshalb nur Gleichung (a) bewiesen. Dabei kann ohne Einschränkung $S = \{1, \dots, k\}$ mit $1 \leq k \leq N$ angenommen werden.

Für die in Satz 1.3 definierten Zufallsvariablen X und Y mit Werten in $M := C_0(]0, \infty[^k \times \mathbb{R}_+^{N-k})$ gilt $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ für alle

$A \in \mathcal{L}(M)$, also auch $\tilde{\mathbb{P}}(X \in \tilde{A}) = \tilde{\mathbb{P}}(Y \in \tilde{A})$ für alle $\tilde{A} \in \widetilde{\mathcal{L}}(M)$. Wegen

$$\bigcap_{(t,\alpha) \in D} \{f \in M: \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(t+\alpha h) - f(t)}{(g(h) \varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} \in B\} \in \widetilde{\mathcal{L}}(M)$$

(vgl. Beweis zu Satz 3) folgt daher für die linke Seite p der Gleichung (a):

$$(3.11) \quad p = \tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcap_{(t,\alpha) \in D} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{\prod_{i \in S} (t_i + \alpha_i h) w^N(\tau_S^1(t + \alpha h)) - \prod_{i \in S} t_i w^N(\tau_S^1(t))}{(g(h) \varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} \in B \right\}\right).$$

Nun gilt für $(t, \alpha) \in R_T$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \downarrow 0} \frac{\left| \prod_{i \in S} (t_i + \alpha_i h) - \prod_{i \in S} t_i \right| w^N(\tau_S^1(t))}{(g(h) \varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} \\ & \leq \lim_{h \downarrow 0} \frac{h |w^N(\tau_S^1(t))|}{(h^{2+|T|} \log 1/h)^{\frac{1}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist für $T = \emptyset$ offensichtlich, für $T \neq \emptyset$ stimmt sie wegen $w^N(\tau_S^1(t)) = 0$.

Es folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{h \downarrow 0} \frac{\prod_{i \in S} (t_i + \alpha_i h) w^N(\tau_S^1(t + \alpha h)) - \prod_{i \in S} t_i w^N(\tau_S^1(t))}{(g(h) \varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} \\ & = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\prod_{i \in S} (t_i + \alpha_i h) (w^N(\tau_S^1(t + \alpha h)) - w^N(\tau_S^1(t)))}{(g(h) \varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} \\ & = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\prod_{i \in S} t_i (w^N(\tau_S^1(t + \alpha h)) - w^N(\tau_S^1(t)))}{(g(h) \varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für } (t, \alpha) \in R_T. \end{aligned}$$

Einsetzen in (3.11) liefert

$$p = \tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcap_{(t,\alpha) \in D} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{\prod_{i \in S} t_i (w^N(\tau_S^1(t + \alpha h)) - w^N(\tau_S^1(t)))}{(g(h) \varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} \in B \right\}\right).$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe des folgenden Lemmas die Behauptung, wenn man die leicht zu beweisende Beziehung

$$\left(\prod_{i \in S} t_i\right)^{-2} \varphi_0(t, \alpha, h) = \varphi_0(\pi_S(t, \alpha), h) \quad \text{für } (t, \alpha) \in R_T$$

berücksichtigt. _ |

Lemma 3.

Unter den Voraussetzungen von Satz 7 gilt

$$\tilde{P}\left(\bigcap_{(t, \alpha) \in R_T} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^N(\pi_S^1(t + \alpha h)) - W^N(\pi_S^1(t) + \pi_S^2(t, \alpha)h)|}{(g(h)\varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} = 0 \right\} \right) = 1.$$

Beweis: Offenbar kann S als nichtleer vorausgesetzt werden.

Da sich R_T als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen darstellen läßt, genügt es, für eine beliebige nichtleere kompakte Teilmenge K von R_T die Gleichung

$$(3.12) \quad \tilde{P}\left(\bigcap_{(t, \alpha) \in K} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^N(\pi_S^1(t + \alpha h)) - W^N(\pi_S^1(t) + \pi_S^2(t, \alpha)h)|}{(g(h)\varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} = 0 \right\} \right) = 1$$

nachzuweisen.

Aus der Kompaktheit von K folgt die Existenz eines Punktes

$(\underline{t}, \underline{\alpha}) \in K$ mit $\varphi_0(t, \alpha, 1) \geq \varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, 1)$ für alle $(t, \alpha) \in K$, also auch mit $\varphi_0(t, \alpha, h) \geq \varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, h)$ für alle $(t, \alpha) \in K$ und $h > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$

gilt daher

$$\frac{1}{n+1} \leq h \leq \frac{1}{n} \quad \inf_{(t, \alpha) \in K} g(h)\varphi_0(t, \alpha, h) = \inf_{n+1} \leq h \leq \frac{1}{n} g(h)\varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, h),$$

so daß wegen der Voraussetzung $\lim_{h \downarrow 0} \frac{g(h)\varphi_0(\underline{t}, \underline{\alpha}, h)}{h^{2+|\mathbb{T}|} \log 1/h} = \infty$ eine

gegen ∞ konvergierende Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver Zahlen existiert mit

$$\inf \{ (g(h) \varphi_0(t, \alpha, h) : \frac{1}{n+1} \leq h \leq \frac{1}{n} \text{ und } (t, \alpha) \in K \} \geq \frac{c_n \log n}{n^{2+|T|}} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Familie $\{(t, \alpha) \in K : t + \alpha \frac{1}{n} > 0 \text{ und } \pi_S^1(t) + \pi_S^2(t, \alpha) \frac{1}{n} > 0\}, n \in \mathbb{N}$, eine offene Überdeckung der kompakten Menge K darstellt, läßt sich ein $m \in \mathbb{N}$ derart angeben, daß für alle $(t, \alpha) \in K$ und $0 \leq h \leq \frac{1}{m}$ der Ausdruck $\pi_S^1(t + \alpha h)$ definiert ist und $\pi_S^1(t) + \pi_S^2(t, \alpha) h$ in $\mathbb{R}_+^N$ liegt.

Ebenso zeigt man die Existenz einer Konstanten $\gamma > 0$ derart, daß im Fall $n \geq m$ für alle $(t, \alpha) \in K$ und $0 < h \leq \frac{1}{n}$ folgende Ungleichungen gelten:

$$\pi_S^1(t + \alpha h) \leq u^n, \quad \pi_S^1(t) + \pi_S^2(t, \alpha) h \leq u^n \quad \text{und}$$

$$|\frac{1}{t_i + \alpha_i h} - (\frac{1}{t_i} - \frac{\alpha_i h}{t_i^2})| \leq \frac{\gamma}{n^2} \quad \text{für } i \in S;$$

$$\text{dabei ist } u^n := \sum_{i \in T} \frac{\gamma}{n} e(i) + \sum_{i \in T} \gamma e(i).$$

Die letzte Forderung ist erfüllbar, da

$$|\frac{1}{t_i + \alpha_i h} - \frac{1}{t_i} + \frac{\alpha_i h}{t_i^2}| = \frac{\alpha_i^2 h^2}{t_i^3 (t_i + \alpha_i h)} \quad \text{für } i \in S.$$

Nach diesen Vorbereitungen kann für $n \geq m$ und $\varepsilon > 0$ folgende Ungleichungskette aufgestellt werden:

$$a_n := \mathbb{P}(\sup \{ \frac{|W^N(\pi_S^1(t + \alpha h)) - W^N(\pi_S^1(t) + \pi_S^2(t, \alpha) h)|}{(g(h) \varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{n+1} \leq h \leq \frac{1}{n}, (t, \alpha) \in K \} > \varepsilon)$$

$$\leq \mathbb{P}(\max \{ |W^N(\pi_S^1(t + \alpha h)) - W^N(\pi_S^1(t) + \pi_S^2(t, \alpha) h)| :$$

$$\frac{1}{n+1} \leq h \leq \frac{1}{n}, (t, \alpha) \in K \} \geq \varepsilon (\frac{c_n \log n}{n^{2+|T|}})^{\frac{1}{2}})$$

$$\leq \mathbb{P}(\max\{|W^N(\sum_{i \in S} s_i e(i) + \sum_{i \notin S} t_i e(i)) - W^N(t)| : 0 \leq s, t \leq u^n, \\ |s_i - t_i| \leq \frac{\gamma}{n^2} \text{ für } i \in S\} \geq \varepsilon (\frac{c_n \log n}{n^{2+|T|}})^{\frac{1}{2}}).$$

Anwendung von Satz 1.9 liefert

$$a_n \leq 2^N \sum_{j \in S} (n^2 + 1) \mathbb{P}(|W^N(\frac{\gamma}{n^2} e(j) + \sum_{i \in T} \frac{\gamma}{n} e(i) + \sum_{i \notin T} \gamma e(i))| \\ \geq \frac{\varepsilon}{3|S|} (\frac{c_n \log n}{n^{2+|T|}})^{\frac{1}{2}}) \\ = 2^N |S| (n^2 + 1) \mathbb{P}(|W^N(\langle 1 \rangle)| \geq \frac{\varepsilon}{3|S|} \frac{\gamma^{\frac{N}{2}}}{n^{\frac{N}{2}}}) (\frac{c_n \log n}{n^{2+|T|}})^{\frac{1}{2}}.$$

Benutzt man die in Lemma 1 für $\mathbb{P}(|W^N(\langle 1 \rangle)| \geq x)$, $x > 0$, angegebene Abschätzung und berücksichtigt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, so folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$. Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt daher

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}_{h \downarrow 0} \max_{(t, \alpha) \in K} \frac{|W^N(\tau_S^1(t + \alpha h)) - W^N(\tau_S^1(t) + \tau_S^2(t, \alpha)h)|}{(g(h) \varphi_0(t, \alpha, h))^{\frac{1}{2}}} \leq \varepsilon) = 1$$

für jedes positive ε und damit auch für $\varepsilon = 0$, womit die gewünschte Gleichung (3.12) gezeigt ist. |

Satz 6 kann nun zu dem Hauptsatz dieses Abschnitts erweitert werden.

Theorem 2.

Ist $D_1 := \{(t, \alpha) \in R_0 : t = s\}$ mit $s \in \mathbb{R}_+^N$ und $D_2 := \{(t, \alpha) \in R_0 : t \in \mathbb{R}_+^N\}$,

so gilt

$$\mathbb{P}(\bigcap_{(t, \alpha) \in D_i} \{\overline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{W^N(t + \alpha h) - W^N(t)}{(2\varphi_0(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1\}) = 1 \text{ für } i=1, 2.$$

Beweis: Für disjunkte Teilmengen S und T von $I := \{1, \dots, N\}$ sei

$$D_i(S, T) := \{(t, \alpha) \in D_i : N_-(\alpha) = S \text{ und } N_0(t) = T\}.$$

Da $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \varphi_i(t, \alpha, h) \log(\log 1/h)}{h^{2+|T|} \log 1/h} = \infty$ für alle $(t, \alpha) \in R_T$, erhält

man aus Satz 7 angewandt auf $g(h) := 2 \log(\log 1/h)$ und $D := D_i(S, T)$

$$\begin{aligned} & \tilde{P}\left(\bigcup_{(t, \alpha) \in D_i(S, T)} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W^N(t + \alpha h) - W^N(t)}{(2 \varphi_0(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\}\right) \\ &= \tilde{P}\left(\bigcup_{(t, \alpha) \in \pi_S[D_i(S, T)]} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W^N(t + \alpha h) - W^N(t)}{(2 \varphi_0(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\}\right). \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist nach Satz 6 wegen

$$\pi_S[D_1(S, T)] \subset \{(t, \alpha) \in R_0 : t = \pi_S^1(s) \text{ und } \alpha \neq 0\} \quad \text{bzw.}$$

$$\pi_S[D_2(S, T)] \subset \{(t, \alpha) \in R_0 : t \in dR_+^N \text{ und } \alpha \neq 0\}$$

gleich 1. Hieraus und aus der Gleichung $D_i = \bigcup_{\substack{S, T \subset I \\ S \cap T = \emptyset}} D_i(S, T)$

folgt nun die Behauptung. _____ |

Wie weiter unten bewiesen wird, ist die Frage, ob für $\mathbb{P}$ -fast

alle $\omega \in \Omega$ die Funktion $W^N(\omega)$ das asymptotische Verhalten aus

Theorem 2 für alle $s \in \mathbb{R}_+^N$ gleichzeitig zeigt, zu verneinen.

Es gilt jedoch

Theorem 3.

Für $\omega \in \Omega$ bezeichne $A(\omega)$ die Menge

$$\begin{aligned} & \{t \in \mathbb{R}_+^N : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W^N(\omega; t + \alpha h) - W^N(\omega; t)}{(2 \varphi_0(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} \neq 1 \text{ für mindestens} \\ & \quad \text{ein } \alpha \text{ mit } (t, \alpha) \in R_0\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathbb{P}_*(\{\omega \in \Omega : \chi^{N*}(A(\omega)) = 0\}) = 1^{(*)}$.

(*) μ_* bzw. μ^* bezeichnet das zu einem Maß μ gehörige innere bzw. äußere Maß.

Wie der nächste Satz zeigt, ist der Durchschnitt von $A(\omega)$ mit einem beliebig vorgegebenen Geradenstück $(s+\alpha x)_{0 < x < y}$ in $\mathbb{R}_+^N$ für $\mathbb{P}$ -fast alle $\omega \in \Omega$ überabzählbar. Insbesondere folgt, daß in Theorem 3 " $\lambda^{N*}(A(\omega))=0$ " nicht durch " $A(\omega)$ ist abzählbar" ersetzbar ist.

Satz 8.

Für $y > 0$ und $(s, \alpha) \in R_0$ mit $D := \{s + \alpha x : 0 < x < y\} \subset \mathbb{R}_+^N$ gilt

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \{t \in D : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W^N(\omega; t + \alpha h) - W^N(\omega; t)}{h} < 0\} \text{ ist abzählbar}\}) = 0.$$

Beweis: 1. Eine stetige Abbildung $f:]0, y[\rightarrow \mathbb{R}$ ist bekanntlich genau dann isoton, wenn $\{x: \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0\}$ abzählbar ist^(*).

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} A &:= \{\omega : \{t \in D : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W^N(\omega; t + \alpha h) - W^N(\omega; t)}{h} < 0\} \text{ ist abzählbar}\} \\ &= \{\omega : x \mapsto W^N(\omega; s + \alpha x) \text{ ist in }]0, y[\text{ isoton}\} \end{aligned}$$

und damit wegen der Stetigkeit der Abbildungen $x \mapsto W^N(\omega; s + \alpha x)$ für $\omega \in \Omega$ die $\mathcal{A}$ -Meßbarkeit von A .

2. Es wird zunächst gezeigt, daß das Ereignis

$$B := A \cap \{W^N(s + \alpha x) > 0 \text{ für } 0 < x < y\}$$

die Wahrscheinlichkeit 0 besitzt.

Nach Satz 1.3 gilt für jede Teilmenge S von $\{1, \dots, N\}$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(x \mapsto \prod_{i \in S} (s_i + \alpha_i x) W^N(\pi_S^1(s + \alpha x)) \text{ ist in }]0, y[\text{ isoton und strikt positiv}).$$

Speziell für $S := N_-(\alpha)$ ist die Abbildung $x \mapsto \prod_{i \in S} (s_i + \alpha_i x)$ in

^(*) vgl. [1], Abschnitt 7.2.

$]0, y[$ antiton und strikt positiv, so daß

$P(B) \leq P(x \mapsto W^N(\tau_S^1(s+\alpha x)) \text{ ist in }]0, y[\text{ isoton})$.

Die letzte Wahrscheinlichkeit ist 0; dies läßt sich wegen der Isotonie der Abbildung $x \mapsto \tau_S^1(s+\alpha x)$ ebenso wie das klassische Ergebnis $P(t \mapsto W^1(t) \text{ ist isoton}) = 0$ beweisen.

3. Um die Gleichung $P(A) = 0$ nachzuweisen, zerlege man A für ein $t = s + \alpha z$ mit $0 < z < y$ in $A_1 := A \cap \{W^N(t) > 0\}$, $A_2 := A \cap \{W^N(t) < 0\}$ und $A_3 := A \cap \{W^N(t) = 0\}$. $P(A_1) = 0$ folgt mittels Teil 2 aus

$A_1 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \mapsto W^N(t + \alpha x) \text{ ist in }]0, \frac{1}{n} \wedge (y - z)[\text{ isoton und strikt positiv}\}$.

Wegen der Symmetrie von W^N gilt

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(x \mapsto W^N(s + \alpha x) \text{ ist in }]0, y[\text{ antiton und } W^N(t) > 0) \\ &= P(x \mapsto W^N(s' + \alpha' x) \text{ ist in }]0, y[\text{ isoton und } W^N(t) > 0) \end{aligned}$$

mit $s' := s + \alpha y$ und $\alpha' := -\alpha$. Da $(s', \alpha') \in R_0$ und $D' := \{s' + \alpha' x : 0 < x < y\} = D$, erhält man die Gleichung $P(A_2) = 0$ nun ebenso wie $P(A_1) = 0$.

Schließlich ist $t > 0$, so daß auch $P(A_3) = 0$. _ |

Abschließend sei bemerkt, daß Theorem 2 auch in der Fassung mit $|W^N(t + \alpha h) - W^N(t)|$ statt $W^N(t + \alpha h) - W^N(t)$ (vgl. Bemerkung zu Satz 4) nicht verallgemeinert werden kann zu

$$P\left(\bigcap_{(t, \alpha) \in R_0} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^N(t + \alpha h) - W^N(t)|}{(2 \varphi_0(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} \right) = 1.$$

Aus dem Hauptsatz in [8] folgt nämlich, daß

$$P\left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^1(t+h) - W^1(t)|}{(2h \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}} < 1 \right\} \right) = 1.$$

§4. Differenzierbarkeit

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Problem der Differenzierbarkeit $(N,1)$ -dimensionaler Wiener'scher Prozesse. Es wird nicht nur untersucht, ob W^N partiell differenzierbar ist, sondern allgemein für $(t, \alpha) \in R_0$ die Frage nach der Differenzierbarkeit von W^N im Punkt t in Richtung α gestellt. Zugrundegelegt ist hierbei

Definition 1.

Für $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^N$ und $\alpha \in \mathbb{R}^N - \{0\}$ sei

$$\underline{D}f(t, \alpha) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(t + \alpha h) - f(t)}{h} \quad \text{und} \quad \overline{D}f(t, \alpha) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(t + \alpha h) - f(t)}{h}.$$

Gilt $-\infty < \underline{D}f(t, \alpha) = \overline{D}f(t, \alpha) < \infty$, so heißt f "differenzierbar in t in Richtung α " und $Df(t, \alpha) := \underline{D}f(t, \alpha)$ "Ableitung von f in t in Richtung α ".

Fast sicher alle Pfade des $(1,1)$ -dimensionalen Wiener'schen Prozesses W^1 besitzen in keinem Punkt eine rechtsseitige und in keinem von 0 verschiedenen Punkt eine linksseitige Ableitung. Mit der in Definition 1 eingeführten Sprechweise gilt also: Fast sicher alle Pfade von W^1 sind für kein Paar $(t, \alpha) \in R_0$ in t in Richtung α differenzierbar. Diese Aussage, die bereits 1933 durch Paley, Wiener und Zygmund ([13]) bewiesen wurde, ist für $(N,1)$ -dimensionale Wiener'sche Prozesse nicht mehr richtig. Denn wie der folgende Satz zeigt, der

eine Zusammenstellung der aus §3 bekannten Ergebnisse über die Differenzierbarkeit von W^N darstellt, gibt es bereits im zeitlich dreidimensionalen Fall Punkte $(t, \alpha) \in R_0$ derart, daß W^3 mit Wahrscheinlichkeit 1 in t in Richtung α differenzierbar ist.

Satz 1.

(a) Für $D := \{(t, \alpha) \in R_0 : |N_0(t)| \geq 3\}$ gilt

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcap_{(t, \alpha) \in D} \{DW^N(t, \alpha) \text{ existiert und ist } 0\}\right) = 1.$$

(b) Ist $D_1 := \{(t, \alpha) \in R_0 : t=s\}$, wobei $s \in \mathbb{R}_+^N$ mit $|N_0(s)| \leq 2$, und $D_2 := \{(t, \alpha) \in R_0 : 1 \leq |N_0(t)| \leq 2\}$, so gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{(t, \alpha) \in D_i} \{\underline{DW}^N(t, \alpha) = -\infty \text{ und } \overline{DW}^N(t, \alpha) = \infty\}\right) = 1 \text{ für } i=1,2.$$

Beweis: Die $\tilde{\mathcal{O}}$ - bzw. $\mathcal{O}$ -Meßbarkeit der Mengen, deren Wahrscheinlichkeit zu berechnen ist, klärt das Korollar zu Satz 3.3 bzw.

Satz 3.2. Im Fall (a) beachte man dazu die Darstellung

$$\begin{aligned} & \bigcap_{(t, \alpha) \in D} \{DW^N(t, \alpha) \text{ existiert und ist } 0\} \\ &= \bigcap_{(t, \alpha) \in D} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|W^N(t+\alpha h) - W^N(t)|}{h} = 0 \right\} \end{aligned}$$

Daß die beiden angegebenen Wahrscheinlichkeiten 1 sind, folgt

wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2\varphi(t, \alpha, h) \log(\log 1/h))^{\frac{1}{2}}}{h} = \begin{cases} 0 & \text{für } (t, \alpha) \in D \text{ im Fall (a),} \\ \infty & \text{für } (t, \alpha) \in D_i \text{ im Fall (b)} \end{cases}$$

sofort aus Theorem 3.2.

Wie am Ende des letzten Paragraphen in Satz 3.8 gezeigt, ist die Verschärfung

$$(4.1) \quad P\left(\bigcap_{\substack{(t,\alpha) \in R_0 \\ |N_0(t)| \leq 2}} \{ \underline{W}^N(t,\alpha) = -\infty \text{ und } \overline{W}^N(t,\alpha) = \infty \} \right) = 1$$

von Satz 1(b) falsch.

Um das Ziel dieses Paragraphen zu erreichen, nämlich nachzuweisen, daß für P -fast alle $\omega \in \Omega$ der Pfad $W^N(\omega)$ für kein (t,α) mit $|N_0(t)| \leq 2$ in t in Richtung α differenzierbar ist, würde es genügen, (4.1) mit "oder" statt "und" zu beweisen.

Dies ist tatsächlich möglich. Es gilt sogar

Theorem 1.

Für eine geeignete positive Konstante C ist

$$P\left(\bigcap_{(t,\alpha) \in R_0} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|W^N(t+\alpha h) - W^N(t)|}{(\varphi_0(t,\alpha,h))^{\frac{1}{2}}} \geq C \right\} \right) = 1.$$

Bemerkungen:

1. Für den Fall $N=1$ ist Theorem 1 bereits von Dvoretzky in [5] gezeigt worden. Der Beweis für zeitlich mehrdimensionale Wiener'sche Prozesse lehnt sich eng an den von Dvoretzky geführten Beweis an. Es treten jedoch im allgemeinen Fall zusätzliche Schwierigkeiten auf.

Meßbarkeitsfragen, die sich hier durch Satz 3.2 erledigen, werden in [5] nicht erörtert.

2. Ob die Aussage auch für $C=\infty$ richtig bleibt, ist schon im Fall $N=1$ ungeklärt (vgl. [5]).

Der Übersichtlichkeit wegen ist der Beweis zu Theorem 1 durch zwei Zwischenbehauptungen unterteilt, die je in einem Lemma formuliert werden.

Komplikationen, die durch den zeitlich mehrdimensionalen Fall entstehen, machen folgenden Hilfssatz nötig:

Lemma 1.

Es sei $\emptyset \neq S \subset I := \{1, \dots, N\}$ und $D_S := \{(u, \beta) \in R_0 : u > 0, \beta \geq 0, N_0(\beta) = \overline{S}\}$.

Für $(u, \beta) \in D_S$ und $n \in \mathbb{N}$ definiere man $u^n := u + \langle \frac{1}{n} \rangle$ und

$\beta^n := \beta + \sum_{i \in S} \frac{1}{n} e(i)$. Dann gilt für jede nichtleere kompakte Teil-

menge K von D_S und jedes $x > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(u, \beta) \in K} \mathbb{P} \left(\min_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \beta \leq \alpha \leq \beta^n}} |W^N(t + \alpha h) - W^N(t + \frac{\alpha}{2} h)| \leq x \varphi_0(u^n, \beta^n, h)^{\frac{1}{2}} \right) < 4x.$$

Beweis: Für $(u, \beta) \in K$ und $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned} (4.2) \quad & \mathbb{P} \left(\min_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \beta \leq \alpha \leq \beta^n}} |W^N(t + \alpha h) - W^N(t + \frac{\alpha}{2} h)| \leq x \varphi_0(u^n, \beta^n, h)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(|W^N(u + \beta h) - W^N(u + \frac{\beta}{2} h)| \leq 3x \varphi_0(u^n, \beta^n, h)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & \quad + \mathbb{P} \left(\max_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \beta \leq \alpha \leq \beta^n}} |W^N(t + \alpha h) - W^N(u + \beta h)| \geq x \varphi_0(u^n, \beta^n, h)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & \quad + \mathbb{P} \left(\max_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \beta \leq \alpha \leq \beta^n}} |W^N(t + \frac{\alpha}{2} h) - W^N(u + \frac{\beta}{2} h)| \geq x \varphi_0(u^n, \beta^n, h)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Der erste Summand wird nach oben abgeschätzt durch

$$\mathbb{P}(|W^N(\langle 1 \rangle)| \leq 3x \left(\frac{\varphi_0(u^n, \beta^n, h)}{\delta(u + \beta \frac{h}{2}, u + \beta h)} \right)^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{6x}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\varphi_0(u^n, \beta^n, h)}{\delta(u + \beta \frac{h}{2}, u + \beta h)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dabei wurde die triviale Abschätzung $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}$ für

die Dichte der Normalverteilung benutzt.

Berücksichtigt man, daß $\phi(t, t+\alpha h) \geq \phi_0(t, \alpha, h) = \phi_0(t, \alpha, 1) \cdot h$ für $(t, \alpha) \in D_S$ und $h > 0$ und daß $\phi_0(\cdot, \alpha, h)$ monoton wächst, so läßt sich diese Ungleichung folgendermaßen fortsetzen:

$$\leq \frac{6x}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\phi_0(u^n, \beta^n, h)}{\phi_0(u, \beta, \frac{h}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{6x}{\pi^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\phi_0(u^n, \beta^n, 1)}{\phi_0(u, \beta, 1)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Durch $f_n(u, \beta) := \frac{\phi_0(u^n, \beta^n, 1)}{\phi_0(u, \beta, 1)}$ wird eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger, monoton fallender Funktionen auf der kompakten Menge K definiert, die punktweise gegen 1 konvergiert. Nach dem Satz von Dini konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann auch gleichmäßig gegen 1, und man erhält mit Hilfe der obigen Abschätzung

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(u, \beta) \in K \\ \frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}} \mathbb{P}(|W^N(u+\beta h) - W^N(u+\beta \frac{h}{2})| \leq 3x \phi_0(u^n, \beta^n, h)^{\frac{1}{2}}) \\ \leq \frac{6x}{\pi^{\frac{1}{2}}} < 4x.$$

Für den zweiten Summanden der Ungleichung (4.2) gilt nach Satz 1.8

$$(4.4) \quad \mathbb{P} \left(\max_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \beta \leq \alpha \leq \beta^n}} |W^N(t+\alpha h) - W^N(u+\beta h)| \geq x \phi_0(u^n, \beta^n, h)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \leq 2^N \mathbb{P}(|W^N(u^n+\beta^n h) - W^N(u+\beta h)| \geq x \phi_0(u^n, \beta^n, h)^{\frac{1}{2}}) \\ = 2^N \mathbb{P}(|W^N(<1>)| \geq x \left(\frac{\phi_0(u^n, \beta^n, h)}{\phi(u+\beta h, u^n+\beta^n h)} \right)^{\frac{1}{2}}).$$

Nutzt man die Isotonie der Abbildungen $\mathbb{R}_+^N \ni t \mapsto \delta(s, s+t)$ und $\mathbb{R}_+^N \ni t \mapsto \delta(t, t+s)$ für $s \in \mathbb{R}_+^N$ sowie $D_S \times]0, \infty[\ni (t, \alpha, h) \mapsto \varphi_0(t, \alpha, h)$ aus, so erhält man für $\frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} \frac{\delta(u+\beta h, u^n+\beta^n h)}{\varphi_0(u^n, \beta^n, h)} &\leq \frac{\delta(u+\beta h, u+\beta h + \langle \frac{1}{n^2} \rangle + \langle \frac{1}{n} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{n}})}{\varphi_0(u, \beta, \frac{1}{n})} \\ &\leq \frac{n \cdot \delta(u+\beta \frac{1}{\sqrt{n}}, u+\beta \frac{1}{\sqrt{n}} + \langle \frac{1}{n^2} \rangle + \langle \frac{1}{n} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{n}})}{\varphi_0(u, \beta, 1)}. \end{aligned}$$

Dieser Quotient hängt auf K stetig von (u, β) ab, fällt in n monoton und konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Aus dem Satz von Dini folgt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(u, \beta) \in K \\ \frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}} \frac{\delta(u+\beta h, u^n+\beta^n h)}{\varphi_0(u^n, \beta^n, h)} = 0,$$

also mittels (4.4) die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(u, \beta) \in K \\ \frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}} \mathbb{P} \left(\max_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \beta \leq \alpha \leq \beta^n}} |W^N(t+\alpha h) - W^N(u+\beta h)| \geq x \varphi_0(u^n, \beta^n, h)^{\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

Eine entsprechende Gleichung gilt auch für den dritten Summanden von (4.2). Beide Gleichungen liefern zusammen mit (4.3) die Behauptung. |

Den nächsten Beweisschritt zu Theorem 1 beinhaltet

Lemma 2.

Unter den Voraussetzungen von Lemma 1 existiert eine positive Konstante C_S derart, daß für jede nichtleere kompakte Teilmenge K von D_S gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3N} \sup_{(u, \beta) \in K} \mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \beta \leq \alpha \leq \beta^n}} \left\{ \max_{\frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{|W^N(t+\alpha h) - W^N(t)|}{\varphi_0(t, \alpha, h)^{\frac{1}{2}}} < C_S \right\} \right) = 0.$$

Beweis: 1. Für $(u, \beta) \in K$, $n \in \mathbb{N}$ und $C_S > 0$ wird durch

$$A_n(u, \beta) := \bigcup_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \beta \leq \alpha \leq \beta^n}} \left\{ \max_{\frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{|W^N(t+\alpha h) - W^N(t)|}{\varphi_0(t, \alpha, h)^{\frac{1}{2}}} < C_S \right\}$$

ein Ereignis definiert; denn die Abbildung

$$(t, \alpha) \longmapsto \max_{\frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{|W^N(\omega; t+\alpha h) - W^N(\omega; t)|}{\varphi_0(t, \alpha, h)^{\frac{1}{2}}}$$

von $[u, u^n] \times [\beta, \beta^n]$ in $\mathbb{R}$ ist für alle $\omega \in \Omega$ stetig.

Zu $\omega \in A_n(u, \beta)$ existiert ein (t, α) mit $(u, \beta) \leq (t, \alpha) \leq (u^n, \beta^n)$ und

$$|W^N(\omega; t+\alpha h) - W^N(\omega; t+\alpha \frac{h}{2})| < 2C_S \varphi_0(u^n, \beta^n, h)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad \frac{2}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Bezeichnet r_n die größte ganze Zahl mit

$$(4.5) \quad 2^{2r_n} \leq \sqrt{n},$$

so folgt $A_n(u, \beta) \subset \bigcap_{1 \leq j \leq r_n} A_n^j(u, \beta)$, wobei

$$A_n^j(u, \beta) := \left\{ \min_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \beta^n}} |W^N(t+\alpha \frac{2^{2j}}{n}) - W^N(t+\alpha \frac{2^{2j-1}}{n})| < 2C_S \varphi_0(u^n, \beta^n, \frac{2^{2j}}{n})^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

2. Es wird nun gezeigt, daß eine natürliche Zahl m derart existiert, daß die Ereignisse $A_n^j(u, \beta)$, $1 \leq j \leq r_n$, unabhängig sind,

falls $n \geq m$ und $(u, \beta) \in K$.

$A_n^j(u, \beta)$ liegt in $\mathcal{A}(I_n^j(u, \beta) \times J_n^j(u, \beta))$, wobei

$$I_n^j(u, \beta) := \prod_{i \in S} [0, u_i^n + \beta_i^n \frac{2^{2j}}{n}] \quad \text{und} \quad \prod_{i \in S} [0, u_i + \beta_i \frac{2^{2j-1}}{n}]$$

$$J_n^j(u, \beta) := \prod_{i \notin S} [0, u_i^n].$$

Wegen Satz 1.1(a) genügt es daher, ein m so zu finden, daß für

$n \geq m$ und $(u, \beta) \in K$ die Mengen $I_n^j(u, \beta)$, $1 \leq j \leq r_n$, paarweise disjunkt sind.

Eine hinreichende Bedingung dafür ist die Ungleichung

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} \leq \min\{\beta_i : (u, \beta) \in K \text{ und } i \in S\}.$$

Denn für $n \geq m$, $2 \leq j \leq r_n$, $(u, \beta) \in K$ und $i \in S$ gilt wegen (4.5)

$$\begin{aligned} u_i^n + \beta_i^n \frac{2^{2(j-1)}}{n} &= u_i + \frac{1}{n^2} + (\beta_i + \frac{1}{n}) \frac{2^{2(j-1)}}{n} \\ &= u_i + \beta_i \frac{2^{2j-1}}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2^{2(j-1)}}{n^2} - \beta_i \frac{2^{2(j-1)}}{n} \\ &\leq u_i + \beta_i \frac{2^{2j-1}}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n\sqrt{n}} - \beta_i \frac{1}{n} \\ &\leq u_i + \beta_i \frac{2^{2j-1}}{n}. \end{aligned}$$

3. Nach Teil 1 und 2 ist $\mathbb{P}(A_n(u, \beta)) \leq \prod_{1 \leq j \leq r_n} \mathbb{P}(A_n^j(u, \beta))$ für

$n \geq m$ und $(u, \beta) \in K$. Hieraus folgt mittels Lemma 1 für hinreichend große n die Ungleichung $\sup_{(u, \beta) \in K} \mathbb{P}(A_n(u, \beta)) < (8C_S)^{r_n}$ und da-

mit wegen $r_n \leq \frac{\log n}{4 \log 2}$

$$n^{3N} \sup_{(u, \beta) \in K} \mathbb{P}(A_n(u, \beta)) \leq n^{3N} (8C_S)^{\frac{\log n}{4 \log 2}} = n^{(3N + \frac{\log(8C_S)}{4 \log 2})}.$$

Für eine von K unabhängige hinreichend kleine positive Konstante C_S konvergiert die rechte und damit auch die linke Seite dieser Ungleichung für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. |

Mit Hilfe von Lemma 2 und den dort benutzten Bezeichnungen läßt sich nun die Behauptung aus Theorem 1 zeigen.

Beweis zu Theorem 1: 1. Ist C_S die in Lemma 2 gefundene Konstante, so gilt für

$$K := \{(u, \beta) \in D_S : \langle \delta \rangle \leq u \leq \langle \gamma \rangle \text{ und } \delta \leq \beta_1 \leq \gamma \text{ für } i \in S\}$$

mit $0 < \delta < \gamma$ die Gleichung

$$(4.6) \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{(u, \beta) \in K} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^N(u + \beta h) - W^N(u)|}{\varphi_0(u, \beta, h)^{\frac{1}{4}}} < C_S \right\}\right) = 0.$$

Denn mit den Ereignissen

$$A_m := \bigcup_{(u, \beta) \in K} \left\{ \sup_{0 < h \leq \frac{1}{\sqrt{m}}} \frac{|W^N(u + \beta h) - W^N(u)|}{\varphi_0(u, \beta, h)^{\frac{1}{4}}} < C_S \right\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

gilt (die $\mathcal{O}_L$ -Meßbarkeit von A_m folgt aus Satz 3.2, da die Abbildungen $(f, u, \beta) \mapsto \sup_{0 < h \leq \frac{1}{\sqrt{m}}} \frac{|f(u + \beta h) - f(u)|}{\varphi_0(u, \beta, h)^{\frac{1}{4}}}$ von $C_N \times K$ in $\tilde{\mathbb{R}}$ nach unten halbstetig sind):

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{(u, \beta) \in K} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^N(u + \beta h) - W^N(u)|}{\varphi_0(u, \beta, h)^{\frac{1}{4}}} < C_S \right\}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_m).$$

Führt man die Abkürzungen

$$L_n := \{l \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N : l \leq \langle \gamma - \delta \rangle n^2\},$$

$$M_n := \{m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N : m_i \leq (\gamma - \delta)n \text{ für } i \in S, m_i = 0 \text{ für } i \notin S\} \text{ und}$$

$$K_n(l, m) := \{(u, \beta) : \langle \delta \rangle + \frac{1}{n^2} \leq u \leq \langle \delta \rangle + \frac{1 + \langle 1 \rangle}{n^2},$$

$$\delta + \frac{m_i}{n} \leq \beta_i \leq \delta + \frac{m_i + 1}{n} \text{ für } i \in S, \beta_i = 0 \text{ für } i \notin S\}$$

für $l \in L_n$ und $m \in M_n$ ein, so lassen sich die einzelnen Summanden folgendermaßen weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A_m) \\ & \leq \inf_{n \geq m} \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{l \in L_n \\ m \in M_n}} \bigcup_{(u, \beta) \in K_n(l, m)} \left\{ \max_{\frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{|W^N(u + \beta h) - W^N(u)|}{\varphi_0(u, \beta, h)^{\frac{1}{4}}} < C_S \right\}\right) \end{aligned}$$

$$\leq \inf_{n \geq m} \sum_{\substack{l \in L_n \\ m \in M_n}} \mathbb{P} \left(\bigcup_{(u, \beta) \in K_n(1, m)} \left\{ \max_{\frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{|W^N(u + \beta h) - W^N(u)|}{\varphi_0(u, \beta, h)^{\frac{1}{4}}} < C_S \right\} \right)$$

$$\leq \inf_{n \geq m} |L_n| \cdot |M_n| \sup_{(u, \beta) \in K} \mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \beta \leq \alpha \leq \beta^n}} \left\{ \max_{\frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{|W^N(t + \alpha h) - W^N(t)|}{\varphi_0(t, \alpha, h)^{\frac{1}{4}}} < C_S \right\} \right)$$

$$\leq \inf_{n \geq m} (r - \delta + 1)^{N + |S|} \cdot n^{2N + |S|} \cdot \sup_{(u, \beta) \in K} \mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{u \leq t \leq u^n \\ \beta \leq \alpha \leq \beta^n}} \left\{ \max_{\frac{1}{n} \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{|W^N(t + \alpha h) - W^N(t)|}{\varphi_0(t, \alpha, h)^{\frac{1}{4}}} < C_S \right\} \right).$$

Dieses Infimum ist nach Lemma 2 gleich 0; also gilt (4.6).

2. Aus (4.6) erhält man für $C := \min\{C_S : \emptyset \neq S \subset I\}$ und

$D^\emptyset := \bigcup_{\emptyset \neq S \subset I} D_S$ ($= \{(t, \alpha) \in R_0 : t > 0 \text{ und } \alpha \geq 0\}$) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\bigcap_{(t, \alpha) \in D^\emptyset} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^N(t + \alpha h) - W^N(t)|}{\varphi_0(t, \alpha, h)^{\frac{1}{4}}} \geq C \right\} \right) \\ & \geq \mathbb{P} \left(\bigcap_{\emptyset \neq S \subset I} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\{(t, \alpha) \in D_S : \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, \right.} \\ & \quad \left. \frac{1}{n} \leq \alpha_i \leq n \text{ für } i \in S, \alpha_i = 0 \text{ für } i \notin S\}} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^N(t + \alpha h) - W^N(t)|}{\varphi_0(t, \alpha, h)^{\frac{1}{4}}} \geq C_S \right\} \right) \\ & = 1. \end{aligned}$$

$D^S := \{(t, \alpha) \in R_0 : t > 0 \text{ und } N_-(\alpha) = S\}$ wird für $S \subset I$ durch π_S (vgl.

Definition 3.4) in $D^\emptyset$ abgebildet. Daher folgt mittels Satz 3.7

für $S \subset I$

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{(t, \alpha) \in D^S} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^N(t + \alpha h) - W^N(t)|}{\varphi_0(t, \alpha, h)^{\frac{1}{4}}} \geq C \right\} \right) = 1$$

und damit

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{\substack{(t, \alpha) \in R_0 \\ t > 0}} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|W^N(t + \alpha h) - W^N(t)|}{\varphi_0(t, \alpha, h)^{\frac{1}{4}}} \geq C \right\} \right) = 1.$$

Da nach Theorem 3.2

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{(t,\alpha) \in R_0 \\ t \in \mathbb{R}_+^N}} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|w^N(t+\alpha h) - w^N(t)|}{\varphi_0(t,\alpha,h)^{\frac{1}{2}}} = \infty \right\}\right) = 1,$$

besitzt C die in der Behauptung geforderte Eigenschaft. _____

Aus Theorem 1 folgt der für das Differenzierbarkeitsproblem wichtige

Satz 2.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{(t,\alpha) \in R_0 \\ t > 0}} \left\{ \underline{D}w^N(t,\alpha) = -\infty \text{ oder } \overline{D}w^N(t,\alpha) = \infty \right\}\right) = 1.$$

Beweis: Die fragliche Menge besitzt die Darstellung

$$A := \bigcap_{\substack{(t,\alpha) \in R_0 \\ t > 0}} \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{|w^N(t+\alpha h) - w^N(t)|}{h} = \infty \right\}. \text{ Aus dieser Darstel-}$$

lung erhält man neben der $\mathcal{O}$ -Meßbarkeit von A mittels Theorem 1

auch die Gleichung $\mathbb{P}(A)=1$; denn für $t > 0$ ist $\lim_{h \downarrow 0} \frac{\varphi_0(t,\alpha,h)^{\frac{1}{2}}}{h} = \infty$. _____

Mit Hilfe der Definition 1 können die wesentlichen Ergebnisse aus den Sätzen 1 und 2 zusammengefaßt werden zu

Theorem 2.

(a) Für $D := \{(t,\alpha) \in R_0 : |N_0(t)| \geq 3\}$ gilt

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcap_{(t,\alpha) \in D} \{Dw^N(t,\alpha) \text{ existiert und ist } 0\}\right) = 1.$$

(b) Für $D := \{(t,\alpha) \in R_0 : |N_0(t)| \leq 2\}$ gilt

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcap_{(t,\alpha) \in D} \{Dw^N(t,\alpha) \text{ existiert nicht}\}\right) = 1.$$

Beweis: Zu zeigen bleibt nur, daß die Menge

$$\bigcap_{(t, \alpha) \in D} \{ D W^N(t, \alpha) \text{ existiert nicht} \}$$

in $\tilde{\mathcal{U}}$ liegt. Dies folgt aber aus Satz 3.3 angewandt auf

$B := \{0\}$ und $\mathcal{L} := \chi_A$ mit der $\mathcal{L}(C_N \times D)$ -meßbaren Menge

$$A := \{(f, t, \alpha) \in C_N \times D : Df(t, \alpha) \text{ existiert}\}$$

$$= \{(f, t, \alpha) \in C_N \times D : -\infty < \underline{D}f(t, \alpha) = \overline{D}f(t, \alpha) < \infty\}. \quad ______ |$$

§5. Weitere lokale Eigenschaften

5.1. Lokale Extrema

P -fast sicher alle Pfade des Wiener'schen Prozesses W^1 besitzen in jedem offenen Intervall ein lokales Maximum und ein lokales Minimum, und alle lokalen Extrema sind streng (siehe [6]).

Diese Aussage gilt auch für $(N,1)$ -dimensionale Wiener'sche Prozesse und soll in diesem Abschnitt bewiesen werden.

Der Vereinfachung der Schreibweise dient

Definition 1.

$$\mathcal{J}_0^N := \{[s,t] \in \mathcal{J}^N : s,t \in \mathbb{Q}^N \text{ mit } 0 \leq s < t\},$$

$$\mathcal{J}_+^N := \{[s,t] \in \mathcal{J}^N : s,t \in \mathbb{Q}^N \text{ mit } 0 < s < t\}.$$

Meßbarkeitsaussagen spielen in diesem Paragraphen eine große Rolle. Sie werden daher in den Behauptungen explizit angegeben.

So zum Beispiel auch in

Satz 1.

$A := \{\omega : \text{alle lokalen Maxima von } W^N(\omega) \text{ sind streng}\}$

ist ein Ereignis mit $P(A) = 1$.

Beweis: Der Beweis für allgemeines N verläuft analog zu dem für $N=1$.

Die Meßbarkeit von A folgt aus der Darstellung

$$\bar{A} = \bigcup_{\substack{I, I' \in \mathcal{J}_0^N \\ I' \subset I}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{I' \supset J \in \mathcal{J}_0^N \\ \delta(J) < \frac{1}{n}}} \bigcup_{\substack{J \supset J_1, J_2 \in \mathcal{J}_0^N \\ J_1 \cap J_2 = \emptyset}} \{ \max_{t \in J_1} W^N(t) = \max_{t \in I} W^N(t) = \max_{t \in J_2} W^N(t) \},$$

wobei $\lambda(\prod_{i=1}^N I_i) := \max_{1 \leq i \leq N} \lambda(I_i)$ für $\prod_{i=1}^N I_i \in \mathcal{I}^N$.

Zum Nachweis der Gleichung $P(A)=1$ sei zunächst bemerkt, daß

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \max_{0 \leq t \leq \frac{1}{n}} W^1(t) > 0 \right\}\right) = 1 \text{ (vgl. Satz 1.7) und damit } P(B)=1$$

für

$$B := \bigcap \left\{ \left\{ \max_{0 \leq t_i \leq \frac{1}{n}} W^N(t) > 0 \right\} : 0 < (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_N) \in \mathbb{Q}^{N-1}, \right. \\ \left. 1 \leq i \leq N, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bezeichnet A_i das Ereignis

$$\bigcup_{0 \leq a < b < c < d} \bigcup_{I \in \mathcal{I}_+^{N-1}} \left\{ \max_{a \leq t_i \leq b} W^N(t) = \right. \\ \left. (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_N) \in I \right. \\ \left. \max_{c \leq t_i \leq d} W^N(t) \right\}, \\ (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_N) \in I$$

so ist, wenn man beachtet, daß $W^N(\omega)$ für $\omega \in B$ keine lokale Maximumstelle in dR_+^N besitzt, $\bar{A} \cap B$ in $\bigcup_{1 \leq i \leq N} A_i$ enthalten. Es genügt daher, für

$$C := \left\{ \max_{t \in [a, b] \times I} W^N(t) = \max_{t \in [c, d] \times I} W^N(t) \right\} \text{ mit } 0 \leq a < b < c < d$$

und $I := \prod_{2 \leq i \leq N} [s_i, u_i] \in \mathcal{I}_+^{N-1}$ die Gleichung $P(C)=0$ zu zeigen.

$$\max_{t \in [a, b] \times I} W^N(t) = \max_{t \in [c, d] \times I} W^N(t) \text{ ist gleichbedeutend mit}$$

$\eta = \xi$, wobei

$$\eta := \max_{t \in [a, b] \times I} W^N(t) - \max_{t \in [c, d] \times I} (W^N(t) - W^N(c, s_2, \dots, s_N)) \\ - W^N(b, s_2, \dots, s_N)$$

und $\xi := W^N(c, s_2, \dots, s_N) - W^N(b, s_2, \dots, s_N)$.

Bezeichnet $\mathbb{P}_\xi$ bzw. $\mathbb{P}_\eta$ die Verteilung von ξ bzw. η , so gilt wegen der Unabhängigkeit von ξ und η

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_\xi \otimes \mathbb{P}_\eta (\{(x,x): x \in \mathbb{R}\}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_\xi(\{x\}) d\mathbb{P}_\eta(x).$$

Dieses Integral hat den Wert 0, da $(c-b) \prod_{i=2}^N s_i > 0$ und $\mathbb{P}_\xi$ somit atomlos ist.

Satz 1 wird wesentlich zum Beweis der folgenden Aussage benutzt:

Satz 2.

Für $A := \{\omega: w^N(\omega) \text{ besitzt in jedem nichtleeren offenen Intervall ein lokales Maximum}\}$

gilt $A \in \mathcal{O}$ und $\mathbb{P}(A) = 1$.

Beweis: Aus der Gleichung

$$A = \bigcap_{I \in \mathcal{I}_0^N} \bigcup_{\substack{J_1, J_2 \in \mathcal{I}_0^N \\ J_1 \subset J_2 \subset I}} \{ \max_{t \in J_1} w^N(t) = \max_{t \in J_2} w^N(t) \}$$

folgt, daß A ein Ereignis ist.

Der zweite Teil der Behauptung wird durch vollständige Induktion nach N nachgewiesen. Da der Fall N=1 in [6] behandelt ist, ist hier nur der Beweis des Induktionsschritts von N auf N+1 zu erbringen. Dazu werden zwei Lemmata benötigt. Das erste ist ein Hilfssatz über reelle Funktionen, dem im Fall N=1 die folgende bekannte Aussage entspricht:

Ist eine stetige reelle Funktion in keinem Intervall monoton,

so besitzt sie in jedem nichtleeren offenen Intervall ein lokales Maximum.

Lemma 1.

$f \in C_{N+1}$ genüge folgenden zwei Bedingungen:

(5.1) Zu $I_0 \in \mathcal{I}_+^1$ und $I \in \mathcal{I}_+^N$ existiert ein $t_0 \in I_0$ derart, daß $f(t_0, \cdot)$ in I ein strenges lokales Maximum besitzt.

(5.2) Für jedes $I \in \mathcal{I}_+^N$ ist $\max_{t \in I} f(\cdot, t)$ in keinem Intervall monoton.

Dann besitzt f in jedem nichtleeren offenen Intervall ein lokales Maximum.

Beweis: Es sei $I_0 \in \mathcal{I}_+^1$ und $I \in \mathcal{I}_+^N$. Gemäß (5.1) existiert ein Punkt $t_0 \in I_0$, ein in I enthaltenes Intervall $J \in \mathcal{I}_+^N$ und ein Punkt $s \in J^0$ mit $f(t_0, t) < f(t_0, s)$ für alle $s+t \in J$. Da f stetig ist, gibt es ein in I_0 enthaltenes Intervall $J_0 \in \mathcal{I}_+^1$ derart, daß das Maximum $\max_{t \in J} f(s_0, t)$ für alle $s_0 \in J_0$ im Inneren von J angenommen wird. Die Funktion $\max_{t \in J} f(\cdot, t)$ ist stetig und nach (5.2) in keinem Intervall monoton, folglich besitzt sie in J_0^0 eine lokale Maximumstelle s'_0 . Ist s' ein Punkt aus J^0 mit $f(s'_0, s') = \max_{t \in J} f(s'_0, t)$, so ist (s'_0, s') ein lokales Maximum in $I_0 \times I$.

Um dieses Ergebnis auf W^{N+1} anwenden zu können, ist ein zweites Lemma nötig:

Lemma 2.

Für $s, u \in \mathbb{R}_+^N$ mit $0 < s \leq u$ gilt

$$P(\max_{s \leq t \leq u} W^{N+1}(\cdot, t) \text{ ist in keinem Intervall monoton}) = 1.$$

Beweis: Zu zeigen ist, daß für $0 \leq a < b$ die Ereignisse

$$C_1 := \{ \max_{s \leq t \leq u} W^{N+1}(\cdot, t) \text{ ist in } [a, b] \text{ isoton} \} \text{ und}$$

$$C_2 := \{ \max_{s \leq t \leq u} W^{N+1}(\cdot, t) \text{ ist in } [a, b] \text{ antiton} \}$$

die Wahrscheinlichkeit 0 besitzen.

Sei dazu $a \leq t_0^1 < t_0^2 \leq \dots \leq b$; dann gilt für $\omega \in C_1$

$$\begin{aligned} \gamma_n(\omega) &:= \max_{s \leq t \leq u} (W^{N+1}(\omega; t_0^{n+1}, t) - W^{N+1}(\omega; t_0^n, t)) \\ &\geq \max_{s \leq t \leq u} W^{N+1}(\omega; t_0^{n+1}, t) - \max_{s \leq t \leq u} W^{N+1}(\omega; t_0^n, t) \geq 0. \end{aligned}$$

Aus der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $\gamma_n, n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\begin{aligned} P(C_1) &\leq \prod_{n=1}^{\infty} P(\gamma_n \geq 0) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} P(\max_{s \leq t \leq u} W^{N+1}(t_0^{n+1} - t_0^n, t) \geq 0) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} P(\max_{s \leq t \leq u} W^N(t) \geq 0). \end{aligned}$$

Dieses unendliche Produkt hat den Wert 0, da, wie man mit Hilfe von Satz 1.8 sieht

$$\begin{aligned} &P(\max_{s \leq t \leq u} W^N(t) < 0) \\ &\geq P(W^N(s) \leq -x \text{ und } \max_{s \leq t \leq u} W^N(t) - W^N(s) < x) \\ &\geq P(W^N(s) = -x) (1 - 2^N P(W^N(u) - W^N(s) \geq x)) \\ &> 0 \text{ für hinreichend große } x. \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man $P(C_2) = 0$.

Der Beweis zu Satz 2 kann nun fortgesetzt werden.

Beweis des Induktionsschritts von N auf N+1 zu Satz 2:

Da $t_0^{-1} W^{N+1}(t_0, \cdot)$ für $t_0 > 0$ einen (N,1)-dimensionalen Wiener-schen Prozeß darstellt, ist die Wahrscheinlichkeit von

$$B := \bigcap_{0 < t_0 \in \mathbb{Q}} \{ \omega: W^{N+1}(\omega; t_0, \cdot) \text{ besitzt in jedem nichtleeren offenen Intervall ein strenges lokales Maximum} \}$$

nach Induktionsvoraussetzung und Satz 1 gleich 1. Nach Lemma 2 besitzt auch das Ereignis

$$C := \bigcap_{I \in \mathcal{I}_+^N} \{ \max_{t \in I} W^{N+1}(\cdot, t) \text{ ist in keinem Intervall monoton} \}$$

die Wahrscheinlichkeit 1. Aus der Inklusion

$$B \cap C =$$

$$A_{N+1} := \{ \omega: W^{N+1}(\omega) \text{ besitzt in jedem nichtleeren offenen Intervall ein lokales Maximum} \},$$

die wegen Lemma 1 gilt, folgt nun die gewünschte Gleichung

$$P(A_{N+1}) = 1. \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

Ist jedes lokale Maximum einer Funktion $f \in C_N$ streng, so ist die Menge M der Maximumstellen von f abzählbar; denn M läßt sich als Vereinigung der diskreten Mengen

$$\{ t \in \mathbb{R}_+^N: f(t) > f(s) \text{ für } 0 < |t-s| < \frac{1}{n} \}, n \in \mathbb{N},$$

darstellen. Es ist daher folgende Zusammenfassung der Sätze 1 und 2 möglich:

Theorem 1.

Für das Ereignis

$A := \{\omega : \text{alle lokalen Maxima von } W^N(\omega) \text{ sind streng und bilden eine abzählbare dichte Teilmenge von } \mathbb{R}_+^N\}$

gilt $P(A) = 1$.

Bemerkung:

Ein Theorem 1 entsprechendes Ergebnis ist wegen der Symmetrie von W^N für lokale Minima gültig.

5.2. Nullstellen

Dieser Abschnitt ist dem Studium topologischer und maßtheoretischer Eigenschaften der Mengen $\{t \in \mathbb{R}_+^N : W^N(\omega; t) = y\}$, $\omega \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}$, gewidmet und verallgemeinert für den Fall $N=1$ bekannte Ergebnisse (vgl. [6]).

Da W^N als Werte nur stetige Funktionen annimmt, kann als erstes festgehalten werden, daß

$$S_y^N(\omega) := \{t \in \mathbb{R}_+^N : W^N(\omega; t) = y\}$$

für alle $\omega \in \Omega$ und $y \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Berücksichtigt man, daß eine Teilmenge eines topologischen Raumes perfekt genannt wird, wenn sie abgeschlossen und ohne isolierte Punkte ist, so beinhaltet Satz 3 neben der Meßbarkeitsbehauptung vor allem, daß $S_y^N(\omega)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 keine isolierten Punkte besitzt.

Satz 3.

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist $A := \{\omega: S_y^N(\omega) \text{ ist perfekt in } \mathbb{R}_+^N\}$ ein Ereignis mit $P(A) = 1$.

Beweis: $A = \{\omega: S_y^N(\omega) \text{ ist ohne isolierte Punkte}\}$

$$= \bigcap_{I \in \mathcal{I}_+^N} \{\omega: |I^0 \cap S_y^N(\omega)| \neq 1\}.$$

Aus der Darstellung

$$\begin{aligned} & \{\omega: |I^0 \cap S_y^N(\omega)| \neq 1\} \\ &= \bigcap \{ \{ \min_{t \in J} |w^N(t) - y| > 0 \}: I^0 \supset J \in \mathcal{I}_+^N \} \cup \\ & \bigcup \{ \{ \min_{t \in J_i} |w^N(t) - y| = 0 \text{ für } i=1,2 \}: I^0 \supset J_1, J_2 \in \mathcal{I}_+^N, J_1 \cap J_2 = \emptyset \} \end{aligned}$$

folgt nun die $\mathcal{G}$ -Meßbarkeit von A .

Zum Beweis von $P(A)=1$ für den Fall $N=1$ sei auf [6] verwiesen.

Während dort die starke Markov-Eigenschaft benutzt wird, ist im zeitlich mehrdimensionalen Fall ein elementarer Beweis möglich:

Wegen der zu Beginn angeführten Darstellung von A genügt es, für $I \in \mathcal{I}_+^N$ die Gleichung $P(\{\omega: |I^0 \cap S_y^N(\omega)| = 1\}) = 0$ nachzuweisen.

Dazu beachte man, daß

$$(5.3) \quad \{\omega: |I^0 \cap S_y^N(\omega)| = 1\} \subset \{ \max_{t \in I} w^N(t) = y \} \cup \{ \min_{t \in I} w^N(t) = y \}.$$

Denn falls es Punkte $\underline{t}$ und $\bar{t}$ in I mit $w^N(\omega; \underline{t}) < y < w^N(\omega; \bar{t})$ gibt, enthält nach dem Zwischenwertsatz jeder in I verlaufende Polygonzug von $\underline{t}$ nach $\bar{t}$ einen Punkt t mit $w^N(\omega; t) = y$.

Falls $I = [s, u]$, gilt $\max_{t \in I} w^N(t) = w^N(s) + \max_{t \in I} (w^N(t) - w^N(s))$,

wobei die beiden Summanden unabhängig sind und der erste wegen $s > 0$ atomlos verteilt ist. Wie im Beweis zu Satz 1 folgt hieraus $P(\max_{t \in I} W^N(t) = y) = 0$ und damit auch $P(\min_{t \in I} W^N(t) = y) = 0$. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich zusammen mit (5.3), daß auch $\{\omega: |I^0 \cap S_y^N(\omega)| = 1\}$ die Wahrscheinlichkeit 0 besitzt. |

Wie weiter unten gezeigt wird, ist $S_y^N(\omega)$ für P -fast alle $\omega \in \Omega$ nicht leer. Da jede nichtleere perfekte Teilmenge eines topologisch vollständigen Raumes überabzählbar viele Punkte besitzt, stellt nach Satz 3 $S_y^N(\omega)$ für P -fast alle $\omega \in \Omega$ eine im Sinne der Mächtigkeit große Teilmenge von $\mathbb{R}_+^N$ dar. Im maßtheoretischen Sinn gilt dagegen:

Satz 4.

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist $A := \{\omega: \lambda^N(S_y^N(\omega)) = 0\}$ ein Ereignis mit $P(A) = 1$.

Beweis: $W^N(\cdot, \cdot): \Omega \times \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}$ ist als Komposition der $\mathcal{O} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^N)$ - $\mathcal{L}(\mathbb{C}_N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^N)$ -meßbaren Abbildung $(\omega, t) \longmapsto (W^N(\omega), t)$ von $\Omega \times \mathbb{R}_+^N$ in $\mathbb{C}_N \times \mathbb{R}_+^N$ und der stetigen Abbildung $(f, t) \longmapsto f(t)$ von $\mathbb{C}_N \times \mathbb{R}_+^N$ in $\mathbb{R}$ eine $\mathcal{O} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^N)$ - $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ -meßbare Abbildung. Es folgt, daß $B := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^N: W^N(\omega; t) = y\}$ in $\mathcal{O} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^N)$ liegt, und damit, daß $S_y^N(\omega)$ mit der Schnittmenge B_ω übereinstimmt, daß A ein Ereignis darstellt.

Ferner erhält man durch zweimalige Anwendung des Satzes von Fubini

$$\int_{\Omega} \chi^N(S_y^N(\omega)) dP(\omega) = P \otimes \chi^N(B) = \int_{\mathbb{R}_+^N} P(W^N(t)=y) d\lambda^N(t).$$

Da die Verteilung von $W^N(t)$ für $t>0$ atomlos ist, verschwindet das letzte und damit auch das erste Integral. Also gilt $P(A)=1$.

Bemerkung:

Da $W^N(t)$ für $t>0$ sogar totalstetig bezüglich λ verteilt ist, bleibt Satz 4 richtig, wenn $S_y^N(\omega)$ ersetzt wird durch $\{t: W^N(\omega; t) \in M\}$, wobei M eine beliebige Borelsche Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist.

Die beiden nächsten Sätze behandeln Eigenschaften von $S_y^N(\omega)$, die P -fast sicher für alle $y \in \mathbb{R}$ gleichzeitig gelten.

Satz 5.

Für das durch

$$\bigcap_{y \in \mathbb{R}} \{\omega: S_y^N(\omega) \cap \{t+\alpha h: h \geq 0\} \text{ ist für alle } (t, \alpha) \in \mathbb{R}_\infty \text{ unbeschränkt}\}$$

definierte Ereignis A gilt $P(A) = 1$.

Beweis: Die Behauptung folgt mittels Satz 3.2 und Theorem 3.1 aus der Darstellung

$$A = \bigcap_{(t, \alpha) \in \mathbb{R}_\infty} \left\{ \lim_{h \rightarrow \infty} W^N(t+\alpha h) = -\infty \text{ und } \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} W^N(t+\alpha h) = \infty \right\}.$$

Während im Fall $N=1$ aus den Sätzen 4 und 5 geschlossen werden kann, daß $S_y^N(\omega)$ P -fast sicher total unzusammenhängend ist, läßt sich im zeitlich mehrdimensionalen Fall aus diesen Sätzen nicht einmal folgern, daß $S_y^N(\omega)$ P -fast sicher nicht zusammen-

hängend ist. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 2.1 kann diese Eigenschaft jedoch bewiesen werden.

Satz 6.

Für $A := \bigcap_{y \in \mathbb{R}} \{\omega : S_y^N(\omega) \text{ ist nicht zusammenhängend}\}$ gilt $\mathbb{P}_*(A) = 1$.

Beweis: 1. Durch

$$A_n := \{W^N(\langle 2n \rangle) > n^{N/2}\} \cap \bigcap_{t \in dI_n} \{W^N(t) < -n^{N/2}\} \cap \{W^N(\langle 4n \rangle) > n^{N/2}\}, n \in \mathbb{N},$$

wobei dI_n den topologischen Rand des Intervalls $I_n := [n, 3n]^N$ bezeichnet, werden Ereignisse definiert, die alle dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzen. Da man A_1 mittels einer geeigneten nichtleeren offenen Teilmenge G von C_N darstellen kann als $\{W^N \in G\}$, folgt aus Theorem 2.1

$$(5.4) \quad \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) > 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2. Zu $\omega \in A_n$ und $-n^{N/2} \leq y \leq n^{N/2}$ existieren nach dem Zwischenwertsatz $h \in]2n, 3n[$ und $h' \in]3n, 4n[$ mit $W^N(\omega; \langle h \rangle) = y = W^N(\omega; \langle h' \rangle)$. Also sind die offenen Teilmengen $S_y^N(\omega) \cap I_n^o$ und $S_y^N(\omega) \cap I_n^o$ von $S_y^N(\omega)$ nicht leer. Da $S_y^N(\omega) = (S_y^N(\omega) \cap I_n^o) \cup (S_y^N(\omega) \cap I_n^o)$ wegen $W^N(\omega, t) < y$ für $t \in dI_n$, ist $S_y^N(\omega)$ nicht zusammenhängend. Es folgt

$$A_\infty := \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n \subset A$$

und damit unter Benutzung von (5.4)

$$\mathbb{P}_*(A) \geq \mathbb{P}(A_\infty) \geq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \mathbb{P}(A_n) > 0.$$

Anwendung des Korollars zu Satz 1.7 auf A_∞ liefert nun die Behauptung.

Bemerkung:

Neben der Frage nach der Meßbarkeit von A bleibt vor allem offen, ob $S_y^N(\omega)$ auch für $N \geq 2$ $\mathbb{P}$ -fast sicher total unzusammenhängend ist.

Die in den Sätzen 3-6 bewiesenen Eigenschaften von $S_y^N(\omega)$ werden zusammengefaßt in

Theorem 2.

Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein Ereignis A mit $\mathbb{P}(A)=1$ derart, daß für $\omega \in A$ gilt:

$S_y^N(\omega)$ ist perfekt, nicht zusammenhängend, besitzt das Lebesgue-Maß 0 und hat für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(t, \alpha) \in \mathbb{R}_\infty$ einen nichtleeren Durchschnitt mit $\{t + \alpha h : h \geq n\}$.

Wegen Theorem 1 gibt es für $\mathbb{P}$ -fast alle ω ein $y=y(\omega)$ so, daß $S_y^N(\omega)$ isolierte Punkte besitzt. Satz 3 läßt sich daher nicht verschärfen zu der Aussage:

$\mathbb{P}$ -fast sicher sind alle Mengen $S_y^N(\omega)$, $y \in \mathbb{R}$, perfekt in $\mathbb{R}_+^N$.

Es gilt jedoch

Satz 7.

$A := \{\omega : \lambda(\{y : S_y^N(\omega) \text{ ist nicht perfekt in } \mathbb{R}_+^N\}) = 0\}$ ist ein Ereignis mit $\mathbb{P}(A) = 1$.

Beweis: Für das Komplement der Menge

$B := \{(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : S_y^N(\omega) \text{ ist nicht perfekt in } \mathbb{R}_+^N\}$ gilt

$$\begin{aligned} B &= \bigcap_{I \in \mathcal{I}_+^N} \{(\omega, y) : |I^0 \cap S_y^N(\omega)| \neq 1\} \\ &= \bigcap_{I \in \mathcal{I}_+^N} \left(\bigcap \{C_J : I^0 \supset J \in \mathcal{I}_+^N\} \cup \bigcup \{\bar{C}_{J_1} \cap \bar{C}_{J_2} : I^0 \supset J_1, J_2 \in \mathcal{I}_+^N, J_1 \cap J_2 = \emptyset\} \right) \end{aligned}$$

mit

$$C_J := \{(\omega, y) : \min_{t \in J} |W^N(\omega, t) - y| > 0\} \text{ für } J \in \mathcal{I}_+^N \text{ (vgl. Beweis zu Satz 3).}$$

Es folgt, daß B in $\mathcal{O} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$ liegt; denn die Abbildung

$$(f, y) \longmapsto |f(t) - y| \text{ von } C_N \times \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R} \text{ ist für } t \in \mathbb{R}_+^N \text{ stetig.}$$

Nach dem Satz von Fubini ist daher

$$\omega \longmapsto \lambda(\{y : S_y^N(\omega) \text{ ist nicht perfekt in } \mathbb{R}_+^N\}) = \lambda(B_\omega) \text{ und damit}$$

auch A meßbar bezüglich $\mathcal{A}$, und es gilt

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \lambda(\{y : S_y^N(\omega) \text{ ist nicht perfekt in } \mathbb{R}_+^N\}) \, dP(\omega) \\ &= \mathbb{P} \otimes \lambda(B) \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(\{\omega : S_y^N(\omega) \text{ ist nicht perfekt in } \mathbb{R}_+^N\}) \, d\lambda(y) \\ &= 0 \text{ wegen Satz 3.} \end{aligned}$$

Hieraus erhält man $P(A) = 1$.

Die Aussage von Satz 7 mit " $\lambda^N(S_y^N(\omega)) \neq 0$ " statt " $S_y^N(\omega)$ ist nicht perfekt in $\mathbb{R}_+^N$ " ist trivial, da die Mengen $S_y^N(\omega)$, $y \in \mathbb{R}$, paarweise disjunkt sind. Verschärft wird dieses Ergebnis ebenso wie Satz 4 durch den abschließenden

Satz 8.

$$A := \bigcap_{y \in \mathbb{R}} \{\omega : \lambda^N(S_y^N(\omega)) = 0\} \text{ ist ein Ereignis mit } P(A) = 1.$$

Beweis: 1. $\bar{A}$ besitzt die Darstellung

$$\bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ l \in \mathbb{N}}} \bigcup_{k \leq y \leq k+1} \{\omega: \lambda^N(\{ \langle \frac{1}{l} \rangle \leq t \leq \langle 1 \rangle : W^N(\omega; t) = y \}) \geq \frac{1}{l}\}$$

$$= \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ l \in \mathbb{N}}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m=1}^n \{\omega: \lambda^N(\{ \langle \frac{1}{l} \rangle \leq t \leq \langle 1 \rangle : W^N(\omega; t) \in [k + \frac{m-1}{n}, k + \frac{m}{n}] \}) \geq \frac{1}{l}\},$$

woraus sich wegen der $\mathcal{O} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^N) - \mathcal{L}(\mathbb{R})$ -Meßbarkeit der Abbildung $(\omega, t) \mapsto W^N(\omega; t)$ mittels des Satzes von Fubini die $\mathcal{O}$ -Meßbarkeit von A ergibt.

Ferner folgt, daß es zum Beweis von $P(A)=1$ genügt, für $k \in \mathbb{Z}$,

$\varepsilon > 0$, $r, u \in \mathbb{R}_+^N$ mit $0 < r < u$ und

$A_{mn} := \{\omega: \lambda^N(\{t \in [r, u]: W^N(\omega; t) \in [k + \frac{m-1}{n}, k + \frac{m}{n}]\}) \geq \varepsilon\}$ die Gleichung

$$P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m=1}^n A_{mn}) = 0 \text{ nachzuweisen.}$$

2. Offenbar gilt

$$P(A_{mn})$$

$$= P(\lambda^{2N}(\{(s, t) \in [r, u]^2: W^N(s), W^N(t) \in [k + \frac{m-1}{n}, k + \frac{m}{n}]\}) \geq \varepsilon^2).$$

Ist K eine kompakte Teilmenge von

$\{(s, t) \in [r, u]^2: s_i \neq t_i \text{ für } 1 \leq i \leq N\}$ mit $\lambda^{2N}([r, u]^2 - K) < \frac{\varepsilon^2}{2}$, so

läßt sich diese Gleichung fortsetzen durch

$$\leq P(\lambda^{2N}(\{(s, t) \in K: W^N(s), W^N(t) \in [k + \frac{m-1}{n}, k + \frac{m}{n}]\}) \geq \frac{\varepsilon^2})$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \lambda^{2N}(\{(s, t) \in K: W^N(s), W^N(t) \in [k + \frac{m-1}{n}, k + \frac{m}{n}]\}) dF(\omega)$$

$$= \frac{2}{\varepsilon^2} \int_K P(W^N(s), W^N(t) \in [k + \frac{m-1}{n}, k + \frac{m}{n}]) d\lambda^{2N}(s, t).$$

Wie in Teil 3 gezeigt wird, existiert eine von m und n unabhängige positive Konstante γ derart, daß

$$(5.5) \quad p_{mn}(s, t) := \mathbb{P}(W^N(s), W^N(t) \in [k + \frac{m-1}{n}, k + \frac{m}{n}]) \leq \frac{\gamma}{n^2} \quad \text{für } s, t \in K.$$

Es folgt $\mathbb{P}(A_{mn}) \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \frac{\gamma}{n^2} \lambda^{2N}([r, u]^2)$ und damit die Gleichung

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m=1}^n A_{mn}\right) = 0.$$

3. Zum nun folgenden Nachweis von (5.5) zerlege man K in die drei kompakten Mengen

$$K_1 := \{(s, t) \in K: s \leq t\} = \{(s, t) \in K: s < t\},$$

$$K_2 := \{(s, t) \in K: t \leq s\} = \{(s, t) \in K: t < s\} \quad \text{und}$$

$$K_3 := \{(s, t) \in K: s \neq t \neq s\} = \{(s, t) \in K: s \neq t \neq s\}.$$

Da für $(s, t) \in K_1$ die Zufallsvariablen $W^N(s)$ und $W^N(t) - W^N(s)$ unabhängig und normalverteilt sind mit der Varianz $\delta(s) > 0$ bzw. $\delta(s, t) > 0$, gilt

$$\begin{aligned} p_{mn}(s, t) &\leq \mathbb{P}(W^N(s) \in [k + \frac{m-1}{n}, k + \frac{m}{n}]) \cdot \mathbb{P}(|W^N(t) - W^N(s)| \leq \frac{1}{n}) \\ &\leq \frac{1}{\pi n^2} (\delta(s) \delta(s, t))^{-1/2}. \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß die Dichte einer Normalverteilung mit der Varianz $\sigma^2 > 0$ nach oben durch die Konstante $(2\pi\sigma^2)^{-1/2}$ beschränkt ist.

Es folgt

$$(5.6) \quad \sup_{(s, t) \in K_1} p_{mn}(s, t) \leq \frac{\gamma_1}{n^2} \quad \text{mit} \quad \gamma_1 := \frac{1}{\pi} \max_{(s, t) \in K_1} (\delta(s) \delta(s, t))^{-1/2}.$$

Ebenso zeigt man

$$(5.7) \quad \sup_{(s, t) \in K_2} p_{mn}(s, t) \leq \frac{\gamma_1}{n^2} \quad \text{mit} \quad \gamma_2 := \frac{1}{\pi} \max_{(s, t) \in K_2} (\delta(t) \delta(t, s))^{-1/2}.$$

Für $(s, t) \in K_3$ sind die Zufallsvariablen $W^N(s, t), W^N(s) - W^N(s, t)$ und $W^N(t) - W^N(s, t)$ unabhängig und normalverteilt mit Varianz $d(s, t) > 0$ bzw. $d(s, t, s) > 0$ bzw. $d(s, t, t) > 0$. Mit Hilfe der Zerlegung $B_1 := \{W^N(s, t) \in [\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}[, l \in \mathbb{Z}$, läßt sich $p_{mn}(s, t)$ daher folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} p_{mn}(s, t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(B_1 \cap \{W^N(s), W^N(t) \in [k + \frac{m-1}{n}, k + \frac{m}{n}]\}) \\ &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(W^N(s) - W^N(s, t) \in [k + \frac{m-1}{n}, k + \frac{m-1+1}{n}]) \\ &\quad \cdot \mathbb{P}(W^N(t) - W^N(s, t) \in [k + \frac{m-1-1}{n}, k + \frac{m-1+1}{n}]) \\ &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(B_1) \cdot \frac{2}{n} \cdot (2\pi d(s, t, s))^{-1/2} \frac{2}{n} (2\pi d(s, t, t))^{-1/2} \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (d(s, t, s) \cdot d(s, t, t))^{-1/2}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$(5.8) \quad \sup_{(s, t) \in K_3} p_{mn}(s, t) \leq \frac{\gamma_1}{n^2}$$

mit $\gamma_3 := \frac{2}{\pi} \max_{(s, t) \in K_3} (d(s, t, s) \cdot d(s, t, t))^{-1/2}$.

Aus (5.6), (5.7) und (5.8) folgt nun, daß die von m und n unabhängige Konstante $\gamma := \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ der Ungleichung (5.5) genügt.

Bemerkung:

Mit Hilfe der für $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathbb{R}_+^N$ durch

$$\nu^N(\omega, t, B) := \lambda^N(0 \leq s \leq t: W^N(\omega; s) \in B) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

definierten Maße $\nu^N(\omega, t, \cdot)$ kann Satz 8 auch folgendermaßen

formuliert werden:

Für $\mathbb{P}$ -fast alle ω sind die Maße $\nu^N(\omega, t, \cdot), t \in \mathbb{R}_+^N$, atomlos.

Im Fall $N=1$ folgt dieses Ergebnis aus dem Hauptsatz in [19], der die Existenz einer Abbildung f von $\hat{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ mit folgenden drei Eigenschaften garantiert:

- (a) $f(\cdot, t, x)$ ist $\mathcal{U}$ - $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ -meßbar für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
- (b) $f(\omega, \cdot, \cdot)$ ist für alle $\omega \in \Omega$ stetig.
- (c) $\nu^1(\omega, t, B) = \int_B f(\omega, t, x) \, d\lambda(x)$ für alle $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}_+$

und $\mathbb{P}$ -fast alle $\omega \in \Omega$.

Die Frage, ob eine diesem tieferliegenden Resultat entsprechende Aussage auch für zeitlich mehrdimensionale Wiener'sche Prozesse gilt, ist noch offen.

Liste der verwendeten Symbole

$e(i), \langle c \rangle$	Seite 1	$A \Delta B$	Seite 9
$ t-s $		$C(A)$	10
$s \leq t, s < t$		$\mathcal{O}(\tau+)$	15
$s \wedge t, s \vee t$		$\ \cdot\ _N$	23
$[s, t], [s, t[,]s, t],$		$\tilde{\mathbb{R}}$	37
$]s, t[$		χ_A	40
$\mathbb{R}_+^N, d\mathbb{R}_+^N$		R_0, R_∞	44
$\mathfrak{I}^N$	2	$f(s, t), f(t)$	46
$C_0(A, \mathbb{R}^d), C_N^d$		$N_0(\alpha), N_+(\alpha), N_-(\alpha)$	47
$C_0(A), C_N$		φ_∞	
$\Delta f(I), \Delta f(s, t)$		γ_0	53
$\overline{A}$		R_S, π_S^1	56
$ A $		π_S^2, π_S	57
$\mathcal{O}_f(M), \mathcal{F}(M)$		μ_*, μ^*	62
$\mathcal{O}_f(M), \mathcal{F}_f(M)$	3	$\underline{D}f(t, \alpha), \overline{D}f(t, \alpha), Df(t, \alpha)$	66
A^0, A^a		$\mathfrak{I}_0^N, \mathfrak{I}_+^N$	78
$\mathcal{L}(M)$		$S_Y^N(\omega)$	84
$\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mu}$			
$G(\{f_i: i \in I\})$			
$\bigotimes_{i=1}^d \mathcal{O}_i, \bigotimes_{i=1}^d \mu_i$			
A_x			
λ^N	4		
$w^N, w^{N,d}, w_i^N$	8		
$\mathcal{O}(T), \mathcal{O}(s)$			

Literaturverzeichnis

- [1] Aumann, G. (1969): Reelle Funktionen. Springer, Berlin.
- [2] Becker, S. (unveröffentlichte Diplomarbeit)
- [3] Censov, N.N. (1956): Wiener random fields depending on several parameters. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 106, 607-609.
- [4] Delporte, J. (1966): Fonctions aléatoires de deux variables presque sûrement à échantillons continus sur un domaine rectangulaire borne. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 6, 181-205.
- [5] Dvoretzky, A. (1963): On the oscillation of the Brownian motion process. Israel J. Math., 1, n^o4, 212-214.
- [6] Freedman, D. (1971): Brownian Motion and Diffusion. Holden-Day, San Francisco.
- [7] Jeh, J. (1960): Wiener measure in a space of functions of two variables. Trans. Amer. Math. Soc., 95, 433-450.
- [8] Knight, F.B. (1974): Existence of small oscillations at zeros of Brownian Motion. Séminaire de Probabilités VIII, 134-149. Lect. Notes in Math., 381. Springer, Berlin.
- [9] Kuelbs, J. (1968): The invariance principle for a lattice of random variables. Ann. Math. Statist., 39, 382-389.
- [10] Kuratowski, K. (1966): Topology, Vol. I. Academic Press, New York.

- [11] Lévy, P. (1965): *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*. Gauthier-Villars, Paris.
- [12] Orey, S. and Pruitt, W.E. (1973): Sample functions of the N-parameter Wiener process. *Ann. Prob.*, 1, 138-163.
- [13] Paley, R.E.A., Wiener, N. and Zygmund, A. (1933): Notes on random functions. *Math. Z.*, 37, 647-668.
- [14] Paranjape, S.R. and Park, C. (1973): Laws of iterated logarithm of multiparameter Wiener processes. *J. Multivariate Anal.*, 3, 132-136.
- [15] Park, W.J. (1970): A multi-parameter Gaussian process. *Ann. Math. Statist.*, 41, 1582-1595.
- [16] Park, W.J. (1971): Weak convergence of probability measures on the function space $C([0,1]^2)$. *J. Multivariate Anal.*, 1, 433-444.
- [17] Parthasarathy, K.R. (1967): *Probability Measures on Metric Spaces*. Academic Press, New York.
- [18] Pyke, R. (1972): *Partial sums of matrix arrays and Brownian sheets. Stochastic Geometry and Stochastic Analysis*. Wiley, New York.
- [19] Trotter, H.F. (1958): A property of Brownian motion path. *Illinois J. Math.*, 2, 425-433.
- [20] Zimmerman, G.J. (1972): Some sample function properties of the two-parameter Gaussian process. *Ann. Math. Statist.*, 43, 1235-1246.

Lebenslauf

Geburtsdatum: Ich bin am 28. 6. 1950

Geburtsort: in Bochum geboren.

Schulbildung: Nach vierjähriger Volksschulzeit besuchte ich das neusprachliche Lessing-Gymnasium in Bochum und bestand dort im Frühjahr 1968 das Abitur.

Studium: Im Wintersemester 1968/69 begann ich an der Ruhr-Universität Bochum mein Mathematikstudium mit Nebenfach Physik. Ich hörte insbesondere Vorlesungen der Herren Professoren Gänßler, Kellerer und Reiffen.

Abschlußprüfung: Die Hauptdiplomprüfung legte ich im Juni 1973 ab.

Berufliche Tätigkeit: Seit 1973 verwalte ich eine wissenschaftliche Assistentenstelle am mathematischen Institut der Ludwig-Maximilians-Universität München.

